3-ЛЕКЦИЯ. Туынды бойынша шешілмеген теңдеулер

Лекция мақсаты: Параметр енгізу әдісімен таныстыру.
Негізгі сөздер: Параметр, ерекше шешім, жалпы интеграл
Қысқаша мазмұны
Туынды бойынша шешілмеген теңдеулер

5.1. Туынды бойынша шешілмеген теңдеулердің жалпы түрін мынандай өрнекпен жазуға болады:

$$F(x, y, y') = 0 \tag{1}$$

мұндағы, F – кейбір $G \subset R^3$ облысында анықталған үздіксіз функция.

Анықтама-1. $\langle a,b \rangle$ аралығында анықталған $y = \varphi(x)$ функциясы (1) теңдеудің шешімі деп аталады, егер мынандай үш шарт орындалса:

1) $\varphi(x)$ функциясы $\langle a,b \rangle$ аралығының барлық нүктесінде дифференциалданатын болса,

2) $(x, \varphi(x), \varphi'(x)) \in G, \forall x \in <a, b>$

3) $F(x, \varphi(x), \varphi'(x)) = 0, \ \forall x \in <a, b>$

Туынды бойынша шешілген теңдеу сияқты, туынды бойынша шешілмеген теңдеу де XOY жазықтығында бағыттар өрісін айқындайды. Бірақ, бұл өріс жалғыз болмауы мүмкін. Себебі, (1) теңдеуді y' бойынша шешкенде оның бірнеше түбірлері болуы мүмкін: $y_i' = f_i(x,y)$. Жалпы жағдайда, (1) теңдеуді y' бойынша шешу мүмкін бола бермейді. Бірақ, басқа айнымалылары бойынша шешілуі мүмкін. Мұндай жағдайда параметр енгізу әдісін қолданады.

Айталық, (1) теңдеу y бойынша шешілген делік: $y = f(x,y')$. Бұл жағдайда $y' = p$ параметрін енгізу арқылы

$$y = f(x,p) \tag{2}$$

теңдеуін аламыз. Осы қатынастан толық дифференциал алып, алмастырудағы $dy = pdx$ байланысын ескерсек, онда мынандай теңдеу аламыз:

$$pdx = \frac{\partial f(x,p)}{\partial x}dx + \frac{\partial f(x,p)}{\partial p}dp \tag{3}$$

немесе

$$M(x,p)dx + N(x,p)dp = 0 \tag{4}$$

Бұл теңдеу бұрын қарастырылған теңдеулердің қатарына жатады. Егер оның $\Phi(x,p,C)$ жалпы интегралы белгілі болса, онда

$$\left.\begin{aligned} &\Phi(x, p, C) = 0 \\ &y = f(x,p) \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

түріндегі қатынастары (1) теңдеудің интегралдық қисығын анықтайды.

Дәл осы сияқты, (1) теңдеу x бойынша шешілген болса: $x = f(y,y')$, онда $y' = p$ параметрін енгізіп, толық дифференциал алатын болсақ:

$$\frac{dy}{p} = \frac{\partial f(y,p)}{\partial y}dy + \frac{\partial f(y,p)}{\partial p}dp \tag{6}$$

теңдеуін аламыз. Бұл теңдеу де симметриялы түрге келтіріледі:

$$M(y,p)dy + N(y,p)dp = 0 \tag{7}$$

Егер соңғы теңдеудің $y = \varphi(p,C)$ шешімі белгілі болса, онда

$$\left.\begin{aligned} &y = \varphi(p,C) \\ &x = f(y,p) \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

қатынастары (1) теңдеудің жалпы шешімінің параметрлік түрін береді.

5.2. Параметр енгізу әдісінің ерекшелігін байқау үшін Лагранж теңдеуін қарастырайық:

$$y = x\varphi(y') + \psi(y') \tag{9}$$

Бұл теңдеуге $y' = p$ ($dy = pdx$) алмастыруын жасап, толық дифференциалын табайық;

$$dy = pdx = \varphi(p)dx + x\varphi'(p)dp + \psi'(p)dp.$$

Осыдан

$$\left[p - \varphi(p)\right]dx - \left[x\varphi'(p) + \psi'(p)\right]dp = 0$$

немесе $(p - \varphi(p) \neq 0)$:

$$\frac{dx}{dp} - \frac{\varphi'(p)}{p - \varphi(p)}x = \frac{\psi'(p)}{p - \varphi(p)} \tag{10}$$

түріндегі сызықтық біртексіз теңдеу аламыз. Тұрақты санды вариациялау әдісімен теңдеудің жалпы шешімін оңай жазамыз:

$$x = \Phi(p, C)$$

Соңғы қатынасқа бастапқы теңдеудің параметрлік түрін қосып жазсақ, жалпы шешімнің параметрлік түрін аламыз:

$$\left.\begin{aligned} x &= \Phi(p, C) \\ y &= x\varphi(p) + \psi(p) \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Егер $p - \varphi(p) = 0$ болса, онда осы теңдеудің нақты шешімдерін: $p = p_i\,(i = \overline{1,n})$, бастапқы теңдеуге қойып,

$$y = p_i x + \psi(p_i),\ (i = \overline{1,n}) \tag{12}$$

түріндегі шешімдер аламыз. Бұл шешімдер ерекше шешім болуы мүмкін. Енді осы Лагранж теңдеуінің дербес түрін қарастырайық:

$$y = xy' + \psi(y') \tag{13}$$

Бұл теңдеуді Клеро теңдеуі деп атайды.

Жоғары айтылған әдіс бойынша $y' = p$ белгілеуін енгізейік:

$$y = xp + \psi(p) \tag{14}$$

Осыдан толық дифференциал тауып, $dy = pdx$ қатынасын пайдалансақ, онда

$$pdx = pdx + xdp + \psi'(p)dp$$

теңдігін аламыз. Ал бұдан

$$\left[x + \psi'(p)\right]dp = 0 \tag{15}$$

Соңғы теңдеу екі теңдеуге бөлінеді:

$$dp = 0 \text{ және } x + \psi'(p) = 0 \tag{16}$$

Осыдан, егер $dp = 0$ болса, онда $p = C$. Мұны бастапқы теңдеуге апарып қойсақ,

$$y = Cx + \psi(C) \tag{17}$$

түріндегі жалпы шешім аламыз.

Егер (16) теңдеудің екіншісі орын алса, онда

$$\left.\begin{aligned} x &= -\psi'(p) \\ y &= -\psi'(p)p + \psi(p) \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

түріндегі Клеро теңдеуінің параметрлік ерекше шешімін аламыз.

5.3. Енді тұйық түрде интегралданатын теңдеулерді келтірейік.

1^0.
$$F(y') = 0 \tag{19}$$

Бұл теңдеудің $y' = b$ түрінде нақты шешімі болуы мүмкін: $F(b) = 0$. Сонда $y' = b$ қатынасын интегралдап, $y = bx + C$ өрнегін табамыз. Осыдан: $b = \dfrac{y - C}{x}$. Бұл қатынасты (19) теңдеуге апарып қойсақ,

$$F=\left(\frac{y-C}{x}\right)=0 \tag{20}$$

түріндегі жалпы интеграл аламыз.

Мысал-1. $y'^3+y'^2-y'+1=0$ теңдеуінің жалпы интегралы мына түрде жазылады:

$$\left(\frac{y-C}{x}\right)^3+\left(\frac{y-C}{x}\right)^2-\frac{y-C}{x}+1=0$$

2^0.
$$F(x,y')=0 \tag{21}$$

Бұл теңдеуді y' бойынша шешуге мүмкіншілік болмаса, онда жаңа параметрді екі қатынаспен енгізу ыңғайлы: $x=\varphi(t), y'=\psi(t)$. Ал $dy=y'dx$ болғандықтан, мынандай теңдеу жазамыз:

$$dy=\psi(t)\varphi'(t)dt$$

Бұдан

$$y=\int\psi(t)\varphi'(t)dt+C$$

Осы өрнектің қасына x-тың параметрлік түрін қосып жазсақ:

$$\begin{gathered}x=\varphi(t),\\ y=\int\psi(t)\varphi'(t)dt+C\end{gathered} \tag{22}$$

түріндегі параметрлік шешімді аламыз.

Мысал-2. $x\sqrt{1+y'^2}=y'$ теңдеуінің шешімін табу үшін $y'=tgt,\left(-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}\right)$ түрінде жаңа параметр енгіземіз. Сонда: $x=\sin t$ болатынын берілген теңдеуден көреміз.

$$dy=y'dx \Rightarrow dy=tgt\cos tdt \Rightarrow dy=\sin tdt$$

Осыдан, $y=\int\sin tdt+C=-\cos t+C$

Сонда
$$\begin{cases}x=\sin t\\ y=-\cos t+C\end{cases}$$

функциялары берілген теңдеудің параметрлік түрдегі жалпы шешімін береді.

3^0.
$$F(y,y')=0 \tag{23}$$

Бұл теңдеуге де параметрді екі қатынаспен енгізу ыңғайлы: $y=\varphi(t), y'=\psi(t)$. Бұдан:

$$dy=y'dx \Rightarrow dx=\frac{dy}{y'} \Rightarrow dx=\frac{\varphi'(t)dt}{\psi(t)}$$

Соңғы қатынасты интегралдасақ, онда

$$x=\int\frac{\varphi'(t)dt}{\psi(t)}+C$$

өрнегін аламыз. Бұған y-тың параметрлік түрін қосып жазсақ,

$$\begin{cases}y=\varphi(t)\\ x=\int\frac{\varphi'(t)dt}{\psi(t)}+C\end{cases} \tag{24}$$

түріндегі параметрлік шешім аламыз.

Мысал-3. $y=\sqrt{1+y'^2}$ теңдеуінің жалпы шешімін табу үшін: $y=cht$, $y'=sht$ алмастыруларын пайдаланамыз. Сонда:

$$dy=y'dx \Rightarrow shtdt=shtdx \Rightarrow dx=dt$$

Сондықтан,

$$\begin{cases}x=t+C\\ y=cht\end{cases}$$

теңдіктері берілген теңдеудің параметрлік түрдегі жалпы шешімі болады.

4^0. Жалпы жағдайда қарастырайық:

$$F(x,y,y')=0 \tag{25}$$

Егер бұл теңдеу екі параметрмен өрнектеледі деп есептесек, онда теңдеуді туынды бойынша шешілген түрге келтіруге болады.
Айталық,

$$x=\varphi(u,v),\ y=\psi(u,v),\ y'=\chi(u,v) \tag{26}$$

функциялары екі u және v параметрлерімен анықталған болсын. Бұл функциялардың күрделі функция түрінде толық дифференциалдарын тауып, $dy=y'dx$ теңдігіне қоятын болсақ, онда

$$\frac{\partial\psi}{\partial u}du+\frac{\partial\psi}{\partial v}dv=\chi(u,v)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}du+\frac{\partial\varphi}{dv}dv\right)$$

қатынасын аламыз. Бұдан сәйкес мүшелерін жинастырып,

$$\frac{dv}{du}=f(u,v) \tag{27}$$

түріндегі теңдеуге келеміз. $v=w(u,c)$- (27) теңдеудің жалпы шешімі болса, онда (25) теңдеудің параметрлік жалпы шешімі былай жазылады:

$$x=\varphi[u,w(u,c)],y=\psi[u,w(u,c)] \tag{28}$$

Кері алмастыру арқылы берілген теңдеудің жалпы интегралын табуға болады.

4-ЛЕКЦИЯ. Шешімнің бар болуы және жалғыздығы

Лекция мақсаты: Коши есебінің қойылуы, шешімнің бар болуының шарттарымен таныстыру.
Негізгі сөздер: Бастапқы есеп, Липшиц шарты, Пикар әдісі, Гронуолл леммасы.

Қысқаша мазмұны

Шешімнің бар болуы және жалғыздығы

6.1. Бұл параграфта туындысы бойынша шешілген бірінші ретті дифференциалдық теңдеудің Коши есебін қанағаттандыратын шешімнің бар болуы және оның жалғыздығы қарастырылады.

Сонымен, бірінші ретті теңдеудің қалыпты түрін алайық:

$$\frac{dy}{dx}=f(x.y), \tag{1}$$

мұндағы, $f(x.y)$ функциясы жазықтықтағы кейбір $D\subset R^2$ тұйық облысында анықталсын. Осы теңдеу үшін бастапқы

$$y(x_0)=y_0 \tag{2}$$

шартын қанағаттандыратын шешімді табу есебі қойылсын. Бұл жерде (x_0,y_0) нүктесі сол D облысының ішінде жатады деп есептелінеді, ал D облысын, әдетте, төртбұрыш түрінде алады:

$$D=\{(x,y):|x-x_0|\le a,|y-y_0|\le b\} \tag{3}$$

мұндағы, a және b - белгілі оң сандар.

Теорема-1. Егер $f(x.y)$ функциясы D облысында төмендегідей екі шартты қанағаттандырса:

1) екі аргументі бойынша үздіксіз, сондықтан ол шектелген:

$$\sup_D|f(x,y)|=M,\ M>0$$

2) y аргументі бойынша Липшиц шартын қанағаттандырады, яғни кез келген екі нүкте үшін

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)|\le L|y_1-y_2| \tag{4}$$

теңсіздігі орындалады, $L>0$, онда бастапқы (2) шартты қанағаттандыратын, $|x-x_0|\le h,\ h=min(a,\dfrac{b}{M}),$ аралығында анықталған үздіксіз дифференциалданатын жалғыз ғана $y=\varphi(x)$ шешім бар болады.

Дәлелдеуі.

1^0. Алдымен Коши есебінің интегралдық теңдеуге пара-пар екендігін көрсетейік.

Айталық, $y=\varphi(x)$ функциясы (2) шартты қанағаттандыратын, $|x-x_0|\le h$ кесіндісінде анықталған (1) теңдеудің шешімі болсын:

$$\frac{d\varphi(x)}{dx}=f[x,\varphi(x)],\ \varphi(x_0)=y_0$$

Соңғы тепе-теңдікті x_0-ден x-қа дейін интегралдасақ, мынандай тепе-теңдік аламыз:

$$\varphi(x)=\varphi(x_0)+\int_{x_0}^{x} f(\tau,\varphi(\tau))d\tau$$

Бұдан $y=\varphi(x)$ функциясының

$$y=y_0+\int_{x_0}^{x} f(\tau,y)d\tau \qquad (5)$$

интегралдық теңдеудің шешімі болатынын көреміз.

Енді керісінше, $y=\varphi(x)$ функциясы (5) теңдеудің шешімі болсын:

$$\varphi(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f[\tau,\varphi(\tau)]d\tau,\ \forall x\in[x_0-h,x_0+h]$$

Бұдан $\varphi(x_0)=y_0$ болатынын көреміз. Егер осы тепе-теңдікті дифференциалдасақ,

$$\frac{d\varphi(x)}{dx}=f[x,\varphi(x)]$$

тепе-теңдігін аламыз.

Бұдан шығатын қорытынды – Коши есебінің шешімін табу үшін интегралдық теңдеудің шешімінің барлығын және жалғыздығын дәлелдесек жеткілікті.

2^0. Интегралдық теңдеудің шешімін біртіндеп жуықтау әдісімен іздейміз. Бұл әдісті Пикар әдісі деп те атайды.

Бастапқы нөлдік жуықтау ретінде ізделініп отырған функцияның алғашқы y_0 мәнін аламыз да, бірінші жуықтау үшін

$$y_1(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(\tau,y_0)d\tau \qquad (6)$$

өрнегін жазамыз, ал екінші жуықтау үшін

$$y_2(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(\tau,y_1)d\tau \qquad (7)$$

өрнегін жазамыз. Жалпы, кез келген n-ші жуықтауды мына түрде жазамыз:

$$y_n(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(\tau,y_{n-1})d\tau \qquad (8)$$

Мұнда $x\in[x_0-h,x_0+h]$. Осы кесіндіні Пеано кесіндісі деп атайды.

Енді алынған $\{y_n\}$ тізбегінің әрбір мүшесі берілген облыстың ішінде жататынын көрсетуіміз керек. Айнымалы x-ты Пеано кесіндісінде өзгереді деп, жуықтаулардың бастапқы мәннен ауытқуларын есептейік.

Алдымен,

$$|y_1(x)-y_0|=\left|\int_{x_0}^{x} f(\tau,y_0)d\tau\right|\le M\left|\int_{x_0}^{x} d\tau\right|=M|x-x_0|\le Mh\le b$$

Екінші жуықтау үшін:

$$|y_2(x)-y_0|=\left|\int_{x_0}^{x} f(\tau,y_1(\tau))d\tau\right|\le M|x-x_0|\le Mh\le b$$

Жалпы, кез келген n-ші жуықтау үшін төмендегідей теңсіздік аламыз:

$$\left|y_n(x)-y_0\right|=\left|\int_{x_0}^{x} f(\tau,y_{n-1}(\tau))d\tau\right|\le M\left|x-x_0\right|\le Mh\le b \qquad (9)$$

Бұл теңсіздіктер тізбектің барлық мүшелері D облысының кейбір кішірейген облысының ішінде жататынын көрсетеді.

3^0. Енді жуықтаулар тізбегінің жинақтылығын көрсетейік. Тізбектің жинақтылығын дәлелдеу үшін сол тізбектен құрылған функциялық қатарды қарастырамыз:

$$y_0+(y_1-y_0)+(y_2-y_1)+\ldots+(y_n-y_{n-1})+\ldots \qquad (10)$$

Осы қатар бірқалыпты жинақты болса, онда $\{y_n\}$ тізбегі де бірқалыпты жинақты болады, өйткені, $S_n=y_n$.

Қатардың әрбір мүшесін, екіншісінен бастап, Пеано кесіндісінде абсолют шамасы бойынша бағалайық:

$$\left|y_1-y_0\right|=\left|\int_{x_0}^{x} f(\tau,y_0)d\tau\right|\le M\left|x-x_0\right|\le Mh,$$

$$\left|y_2-y_1\right|=\left|\int_{x_0}^{x}\left[f(\tau,y_1(\tau))-f(\tau,y_0)\right]d\tau\right|\le\left|\int_{x_0}^{x}\left|f(\tau,y_1(\tau))-f(\tau,y_0)\right|d\tau\right|$$

Соңғы теңсіздікке Липшиц шартын пайдалансақ, онда

$$\left|y_2-y_1\right|\le L\left|\int_{x_0}^{x}\left|y_1(\tau)-y_0\right|d\tau\right|\le ML\int_{x_0}^{x}\left|\tau-\tau_0\right|d\tau=ML\frac{\left|x-x_0\right|^2}{2!}\le ML\frac{h^2}{2!}$$

Осылайша,

$$\left|y_3-y_2\right|=\left|\int_{x_0}^{x}\left[f(\tau,y_2(\tau))-f(\tau,y_1(\tau))\right]d\tau\right|\le L\left|\int_{x_0}^{x}\left|y_2(\tau)-y_1(\tau)\right|d\tau\right|\le$$

$$\le ML^2\int_{x_0}^{x}\frac{\left|\tau-\tau_0\right|^2}{2!}d\tau=ML^2\frac{\left|x-x_0\right|^3}{3!}\le ML^2\frac{h^3}{3!}$$

теңсіздігі алынады. Кез келген n-ші мүше үшін де индукция әдісін пайдаланып, төмендегідей теңсіздік аламыз:

$$\left|y_n-y_{n-1}\right|=\left|\int_{x_0}^{x}\left[f(\tau,y_{n-1}(\tau))-f(\tau,y_{n-2}(\tau))\right]d\tau\right|\le$$

$$\le L\left|\int_{x_0}^{x}\left|y_{n-1}(\tau)-y_{n-2}(\tau)\right|d\tau\right|\le ML^{n-1}\frac{\left|x-x_0\right|^n}{n!}\le ML^{n-1}\frac{h^n}{n!}$$

Сонымен, функциялық (10) қатардың абсолют шамасынан құрылған қатар Пеано кесіндісінде төмендегідей сандық қатармен бағаланып отыр:

$$|y_0|+Mh+ML\frac{h^2}{2!}+ML^2\frac{h^3}{3!}+\ldots+ML^{n-1}\frac{h^n}{h!}+\ldots \qquad (11)$$

Бұл қатарды (10) функциялық қатардың мажоранты деп атайды.

Енді осы мажоранттық қатардың жинақтылығын көрсетейік. Даламбер белгісіне сүйенсек,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{ML^n h^{n+1}n!}{ML^{n-1}h^n(n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{Lh}{n+1}=0<1,$$

яғни, (11) қатар жинақты. Сондықтан, Вейерштрасс теоремасы бойынша функциялық (10) қатар Пеано кесіндісінің ішінде бірқалыпты абсолютты жинақты. Егер қатардың қосындысын $\varphi(x)$ деп белгілесек, онда тізбектің шегі осы $\varphi(x)$ болады:

$$\lim_{n\to\infty}y_n(x)=\varphi(x)$$

(10) қатардың әрбір мүшесі $\left|x-x_0\right|\le h$ кесіндінің ішінде үздіксіз функция болғандықтан және ол қатар бірқалыпты жинақты болғандықтан, Коши теоремасы бойынша осы кесіндінің ішінде $\varphi(x)$ функциясы да үздіксіз болады.

4^0. Тізбектің бірқалыпты жинақтылығынан $\left| y_n(x) - \varphi(x) \right| < \varepsilon, \forall n > N(\varepsilon)$ шарты шығады. Липшиц шартын пайдаланып,

$$\left| \int_{x_0}^{x} f[\tau, y_n(\tau)] d\tau - \int_{x_0}^{x} f[\tau, \varphi(\tau)] d\tau \right| \le \left| \int_{x_0}^{x} \left| f[\tau, y_n(\tau)] - f[\tau, \varphi(\tau)] \right| d\tau \right| \le$$

$$\le L \left| \int_{x_0}^{x} \left| y_n(\tau) - \varphi(\tau) \right| d\tau \right| \le L\varepsilon \left| x - x_0 \right| \le L\varepsilon h$$

теңсіздігін аламыз. Бұл теңсіздік интегралдан шек алу үшін сол интеграл астындағы өрнектен шек алуға болатынын көрсетеді, яғни

$$\lim_{n\to\infty} \int_{x_0}^{x} f(\tau, y_n(\tau)) d\tau = \int_{x_0}^{x} f(\tau, \lim y_n(\tau)) d\tau = \int_{x_0}^{x} f(\tau, \varphi(\tau)) d\tau$$

Осыны пайдаланып, (8) қатынастан шек алайық:

$$\lim_{n\to\infty} y_n(x) = \lim_{n\to\infty} \left(y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\tau, y_{n-1}(\tau)) d\tau \right) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\tau, \varphi(\tau)) d\tau$$

немесе

$$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\tau, \varphi(\tau)) d\tau \tag{12}$$

Бұл тепе-теңдіктен $\varphi(x)$ функциясының Пеано кесіндісінде интегралдық теңдеудің шешімі болатынын көреміз. Сондықтан, ол Коши есебінің шешімін береді.

5^0. Коши есебінің шешімінің жалғыздығын дәлелдеу үшін алдымен Гронуолл леммасын келтірейік.

Лемма. Кейбір $\langle a, b \rangle$ аралығында үздіксіз $u(t) \ge 0, f(t) \ge 0$ функциялары және $C > 0$ тұрақты саны үшін

$$u(t) \le C + \left| \int_{t_0}^{t} f(\tau) u(\tau) d\tau \right|, \ \forall t, t_0 \in < a, b > \tag{13}$$

теңсіздігі орындалса, онда одан мынандай теңсіздік алуға болады:

$$u(t) \le C e^{\left| \int_{t_0}^{t} f(\tau) d\tau \right|} \tag{14}$$

Дәлелдеуі. (13) теңсіздікті оң жағындағы қосындыға бөлейік $(t \ge t_0)$:

$$\frac{u(t)}{C + \int_{t_0}^{t} f(\tau) u(\tau) d\tau} \le 1$$

Екі жағында оң $f(t)$ функциясына көбейтіп, t_0 -ден t -ға дейін интеграл алайық:

$$\int_{t_0}^{t} \frac{f(\tau) u(\tau) d\tau}{C + \int_{t_0}^{t} f(\tau_1) u(\tau_1) d\tau_1} \le \int_{t_0}^{t} f(\tau) d\tau$$

Мұнда бөлшектің алымы бөлімінің туындысы екенін ескерсек, онда

$$\ln \left| C + \int_{t_0}^{t} f(\tau_1) u(\tau_1) d\tau_1 \right|_{t_0}^{t} \le \int_{t_0}^{t} f(\tau) d\tau$$

Осыдан

$$\ln \left| C + \int_{t_0}^{t} f(\tau_1) u(\tau_1) d\tau \right| - \ln C \le \int_{t_0}^{t} f(\tau) d\tau$$

Потенциалдап, одан соң берілген (13) теңсіздікті пайдалансақ, (14) теңсіздікке келеміз ($t \le t_0$ болғанда лемманы дәлелдеу үшін интегралдың бағытын өзгертсе, жеткілікті).

Енді осы (14) теңсіздікті пайдаланып, шешімнің жалғыздығын көрсетейік.

Айталық, $\varphi(x)$ және $\psi(x)$ функциялары әртүрлі екі шешім болсын:

$$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\tau,\varphi(\tau))d\tau ,$$

$$\psi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\tau,\psi(\tau))d\tau$$

Осы шешімдердің айырмасын бағалайық:

$$|\varphi(x) - \psi(x)| = \left|\int_{x_0}^{x}[f(\tau,\varphi(\tau)) - f(\tau,\psi(\tau))]d\tau\right| \le L\int_{x_0}^{x}|\varphi(\tau) - \psi(\tau)|d\tau$$

Мұнда $u(x) = |\varphi(x) - \psi(x)|$, $f(x)=L$, $C=0$ екенін ескерсек, (14) теңсіздіктен $|\varphi(x) - \psi(x)| = 0$ теңдігі шығатынын көреміз, яғни $\varphi(x)=\psi(x)$, $\forall x \in [x_0 - h,\ x + h]$.

Сонымен, Пеано кесіндісінде Коши есебінің тек жалғыз ғана шешімі бар екені толық дәлелденді.

Ескерту-1. Шешім $[x_0 - h,\ x + h]$ кесіндісінде анықталып отыр. Мұнда $h = min\left\{a, \dfrac{b}{M}\right\}$, яғни h саны M санына кері тәуелді: M саны үлкен болса, h аз сан болады. Сондықтан, шешім x_0 нүктесінің қысқа тұйық аумағында анықталып отыр. Осы себепті бұл тұжырымды локалды теорема деп атайды. Ал шындығында, шешімді берілген облыстың шекарасына дейін созуға болады.

Ескерту-2. Әдетте, Липшиц шартының орнына одан басымырақ және оңай тексерілетін шарт алынады. Дәлірек, $f(x,y)$ функциясы берілген тұйық облыста у аргументі бойынша үздіксіз дифференциалданады – деп.

Бұл шарт орындалғанда Липшиц шарты өзінен өзі орындалады.

Шынында да, егер D облысында

$$\sup_D |f(x,y)| \le L$$

теңсіздігі орын алса, онда өсімше туралы Лагранж теоремасын пайдаланамыз:

$$f(x,y_1) - f(x,y_2) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_1 + \theta(y_1 - y_2))(y_1 - y_2), (0 < \theta < 1)$$ Осыдан,

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \le L|y_1 - y_2|$$

яғни, Липшиц шартын алдық. Ал Липшиц шартынан функцияның дифференциалдануы шыға бермейді. Оған бір мысал, $f(x,y) = |y|$ функциясы. Бұл функция Липшиц шартын кез келген аралықта қанағаттандырады:

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| = ||y_1| - |y_2|| \le |y_1 - y_2|,\ L = 1$$

Алайда, бұл функцияның $(x,0)$ нүктесінде y бойынша дербес туындысы анықталмаған.

Жалпы, Липшиц шарты функцияның бір аргументі бойынша бірқалыпты өсуін көрсетеді.

Ескерту-3. Тіктөртбұрыштың орнына кез келген шектелген тұйық облыс алуға болады. Бұл жағдайда (x_0, y_0) нүктесі облыстың ішкі нүктесі болуы керек.

Ескерту-4. Теореманы (x_0, y_0) нүктесін ішінде ұстайтын ашық облыста да дәлелдеуге болады. Ол үшін $f(x,y)$ функциясының осы облыста үздіксіз болуымен қатар, сол облыстың кез келген ішкі шектелген тұйық бөлігінде Липшиц шартын қанағаттандыруы тиіс.

Ескерту-5. Теоремадағы $f(x,y)$ функциясы тек үздіксіз ғана болса, яғни Липшиц шарты орындалмаса, онда теңдеудің бастапқы шартты қанағаттандыратын шешімі болады, бірақ ол жалғыз болмауы мүмкін. Бұл тұжырымды Пеано теоремасы айқындайды.

5-ЛЕКЦИЯ. Жоғарғы ретті дифференциалдық теңдеулер

Лекция мақсаты: Жоғарғы ретті теңдеулерді интегралдау әдістерімен таныстыру.
Негізгі сөздер: Жалпы шешім, Якоби анықтауышы, жалпы интеграл, аралық интеграл.
Қысқаша мазмұны

Негізгі түсініктер және анықтамалар

1.1. Жоғарғы ретті жәй дифференциалдық теңдеудің туынды бойынша шешілмеген түрі былай жазылады:

$$F(x,y,y',y'',...,y^{(n)})=0 \tag{1}$$

Мұндағы, x-тәуелсіз айнымалы, y-белгісіз функция, ал $y',y'',...,y^{(n)}$- белгісіз функцияның туындылары $(n>1)$. F - кейбір $G\subset R^{n+2}$ облысында анықталған нақты үздіксіз функция.

Егер (1) қатынас жоғарғы $y^{(n)}$ туындысы бойынша шешілсе, онда былай жазамыз:

$$y^{(n)}=f(x,y,y',...,y^{(n-1)}) \tag{2}$$

Мұндағы, f - функциясы кейбір $D\subset R^{n+1}$ облысында анықталған үздіксіз функция деп есептелінеді.

Бұл теңдеулердің шешімдері де бірінші ретті теңдеулердің шешімдеріне ұқсас түрде анықталады.

Анықтама-1. $\langle a,b\rangle$ аралығында анықталған $y=\varphi(x)$ функциясы (2) теңдеудің осы аралықтағы шешімі деп аталынады, егер ол төмендегідей үш шартты қанағаттандырса:

1) $\varphi(x)$ функциясы $\langle a,b\rangle$ аралығында n рет дифференциалданатын болса;
2) $(x,\varphi(x),\varphi'(x),...,\varphi^{(n-1)}(x))\in D, \forall x\in\langle a,b\rangle$;
3) $\varphi^{(n)}(x)=f\left[x,\varphi(x),\varphi'(x),...,\varphi^{(n-1)}(x)\right], \forall\in\langle a,b\rangle$.

Айқындалмаған (1) теңдеудің де шешімін осы түрде анықтауға болады.

Анықтама-2. $\langle a,b\rangle$ аралығында анықталған $y=\varphi(x)$ функциясы (1) теңдеудің осы аралықтағы шешімі деп аталынады, егер ол төмендегідей үш шартты қанағаттандырса:

1) $\varphi(x)$ функциясы $\langle a,b\rangle$ аралығында n рет дифференциалданатын болса;
2) $\left(x,\varphi(x),\varphi'(x),...,\varphi^{(n)}(x)\right)\in G, \forall x\in\langle a,b\rangle$;
3) $F\left(x,\varphi(x),\varphi'(x),...,\varphi^{(n)}(x)\right)=0, \forall\in\langle a,b\rangle$.

Жоғарғы ретті теңдеу үшін Коши есебі былайша қойылады: (2) теңдеудің барлық шешімдерінің ішінен

$$\varphi(x_0)=y_0,\varphi'(x_0)=y_0^1,...,\varphi^{(n-1)}(x_0)=y_0^{n-1} \tag{3}$$

шартын қанағаттандыратын шешімді табу керек. Мұндағы, $x_0,y_0,y_0^1,...,y_0^{n-1}$ сандарын бастапқы мәндер, ал (3) шартты бастапқы шарт деп атайды. Әрине, мұнда $\left(x_0,y_0,y_0^1,...,y_0^{n-1}\right)\in D$.

Бұл жерде де Коши есебіне геометриялық, механикалық мән беруге болады. Бірақ, теңдеудің реті жоғары болған сайын бастапқы шартқа мән-мағына беру қиынға соғады. Мысалы, екінші ретті теңдеу үшін қойылған бастапқы екі мәннің біріншісі, шешімнің қай нүкте арқылы өтетінін білдірсе, екіншісі, интегралдық қисықтың сол нүктедегі жанамасының x өсімен жасайтын бұрыштың тангенсін білдіреді, ал механикалық жағынан – қозғалыстың берілген қалыптан қандай жылдамдықпен өтетінін білдіреді.

1.2. Жоғарғы ретті теңдеулердің қасиеттерін зерттегенде оларды бірінші ретті теңдеулер жүйесіне келтіріп алу ыңғайлы.

Берілген (2) теңдеу үшін мынандай белгілеулер енгізейік:

$$y = y_1, y' = y_2, y'' = y_3, \dots, y^{(n-1)} = y_n$$

Бұл жағдайда (2) теңдеудің орнына мынандай жүйе аламыз:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{dy_1}{dx} = y_2, \\
&\frac{dy_2}{dx} = y_3, \\
&\dots\dots\dots\dots \\
&\frac{dy_{n-1}}{dx} = y_n, \\
&\frac{dy_n}{dx} = f(x, y_1, y_2, \dots, y_n)
\end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Бұл жүйе жалпы қалыпты

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\
&\frac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&\frac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n)
\end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

жүйенің дербес түрі. Сондықтан, алда біз (5) түрдегі қалыпты жүйелерді қарастырамыз.

Жалпы, бірінші ретті n теңдеулердің қалыпты жүйесін n ретті бір теңдеуге келтіруге болады. Ол үшін (5) жүйенің бір теңдеуін $n-1$ рет дифференциалдап, сол жүйенің басқа теңдеулерін пайдаланып отыру керек (мұнда f_i функциялары керекті рет дифференциалданады деп алу керек). (5) жүйенің бірінші теңдеуін алып $n-1$ рет дифференциалдайық:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d^2 y_1}{dx^2} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y_1}\frac{dy_1}{dx} + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial y_n}\frac{dy_n}{dx} = \\
&= \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y_1} f_1 + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial y_n} f_n = g_2(x, y_1, \dots, y_n) \\
&\frac{d^3 y_1}{dx^{3.}} = \frac{\partial g_2}{\partial x} + \frac{\partial g_2}{\partial y_1}\frac{dy_1}{dx} + \dots + \frac{\partial g_2}{\partial y_n}\frac{dy_n}{dx} = \\
&= \frac{\partial g_2}{\partial x} + \frac{\partial g_2}{\partial y_1} f_1 + \dots + \frac{\partial g_2}{\partial y_n} f_n = g_3(x, y_1, \dots, y_n) \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

Егер $\dfrac{\partial(f_1, g_2, \dots, g_{n-1})}{\partial(y_2, y_3, \dots, y_n)} \neq 0$, онда (5) жүйенің бірінші теңдеуінен және (6) жүйенің алдыңғы $n-2$ - теңдеуінен құрылған жүйені $y_2, y_3, \dots, y_n$ бойынша шешуге болады және олар $x, y_1, y_1^1, \dots, y_1^{(n-1)}$ арқылы өрнектеледі.

Осы табылған $y_2, y_3, \dots, y_n$ өрнектерін (6) жүйенің соңғы теңдеуіне апарып қойсақ,

$$y_1^{(n)} = f(x, y_1, y_1^1, \dots, y_1^{(n-1)}) \qquad (7)$$

түріндегі n ретті бір теңдеу аламыз. (5) жүйе мен (7) теңдеудің интегралдық қисықтары бір болады.

1.3. Енді (5) түрдегі қалыпты жүйелерге байланысты кейбір түсініктерді келтірейік.

Алдымен, бұл жүйелерді векторлық функциялар енгізу арқылы қысқартып жазуға болады.

Егер $y = colon(y_1, y_2, ..., y_n)$ және $f = colon(f_1, f_2, ..., f_n)$ деп алсақ, онда (5) жүйені былай жазамыз:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{8}$$

Бұл қатынасты векторлық бір теңдеу деп те, қалыпты жүйе деп те атауға болады. Мұндағы, $f(x,y)$ - вектор-функциясы кейбір $D \subset R^{n+1}$ облысында анықталған үздіксіз функция. Бұл жүйенің шешімін де алдыңғы анықтамаларға ұқсас түрде анықтайды.

Анықтама-3. $\langle a,b \rangle$ аралығында анықталған $y = \varphi(x)$ вектор-функциясы (8) жүйенің шешімі деп аталынады, егер ол төмендегідей үш шартты қанағаттандырса:

1) $\varphi(x)$ функциясы $\langle a,b \rangle$ аралығында дифференциалданатын болса;

2) $(x, \varphi(x)) \in D, \forall x \in \langle a,b \rangle$;

3) $\dfrac{d\varphi(x)}{dx} = f[x, \varphi(x)], \forall x \in \langle a,b \rangle$.

Айталық, $y = \varphi(x)$ вектор-функциясы (8) жүйенің $\langle a,b \rangle$ аралығында анықталған шешімі болсын. $R^{n+1}_{x,y}$ кеңістігіндегі $(x, \varphi(x)), x \in \langle a,b \rangle$ - нүктелердің жиыны берілген жүйенің интегралдық қисығын береді, ал R^n_y кеңістігіндегі $(\varphi(x)), x \in \langle a,b \rangle$- нүктелердің жиыны жүйенің траекториясын береді. Осы R^n_y кеңістігі фазалық кеңістік деп аталынады. Белгілі бір шешімге сәйкес траектория сол шешімнің $R^{n+1}_{x,y}$ кеңістігіндегі интегралдық қисықтың R^n_y кеңістігіне x өсіне параллель түсірілген көлеңі (проекциясы) болып табылады.

Векторлық (8) теңдеу үшін Коши есебі былай қойылады: барлық шешімдердің ішінен

$$\varphi(x_0) = y^0 \tag{9}$$

шартты қанағаттандыратын $y = \varphi(x)$ шешімін табу керек. Мұнда $y^0 = colon(y^0_1, ..., y^0_n)$ - бастапқы вектор, $(x_0, y^0) \in D$ - бастапқы нүкте.

Бұл Коши есебіне жауапты төмендегідей теорема айқындайды.

Теорема-1. Егер $f(x,y)$ функциясы бастапқы нүктені қамтитын ашық $D \subset R^{n+1}$ облысында үздіксіз болса, ал оның кез келген шектелген тұйық ішкі бөлігінде y векторы ьойынша Липшиц шартын қанағаттандыратын болса, онда Коши есебінің кейбір кішірейген аралықта анықталған жалғыз ғана шешімі болады.

Бұл теореманы глобалды теорема дейді. Біз теореманың дәлелдеуін келтірмейміз (оны [5] оқулықтан көруге болады).

Шешімнің басқада қасиеттерін білдіретін кейбір тұжырымдарды қысқаша түрде дәлелдеусіз келтіре кетейік.

Теорема-2. Егер (8) теңдеу үшін 1-теореманың шарттары орындалса, онда Коши есебін қанағаттандыратын шешім бастапқы мәндер бойынша үздіксіз болады.

Теорема-3. Егер (8) теңдеудің оң жағындағы функция қосымша кейбір параметрлерге байланысты болса және сол параметрлер бойынша үздіксіз болса, онда Коши есебін қанағаттандыратын шешім параметрлер бойынша да үздіксіз болады.

Бұл теоремалардың да дәлелдеулерін жоғарыда көрсетілген оқу құралынан алуға болады.

1.4. Қалыпты (8) жүйедегі $f(x,y)$ вектор-функциясы кейбір ашық (не тұйық) $D \subset R^{n+1}$ облысында шешімнің бар болу және жалғыздық шарттарын қанағаттандырсын. Осы D облысты шешімнің бар болу және жалғыздық облысы деп атайды.

Анықтама-4. D облысында анықталған, тәуелсіз айнымалы бойынша үздіксіз дифференциалданатын, тұрақты $C = colon(C_1, C_2, ..., C_n)$ векторы бойынша үздіксіз

$$y = \varphi(x, C) \tag{10}$$

функциясы (8) жүйенің жалпы шешімі деп аталынады, егер ол төмендегідей екі шартты қанағаттандырса:

1) оны тұрақты C векторы бойынша шешуге болатын болса, яғни

$$C = \psi(x, y) \tag{11}$$

2) тұрақты C векторының (11) формула бойынша анықталған барлық мәндерінде (10) қатынас (8) жүйенің шешімі болса.

Бұл анықтама Коши есебінің шешімін табу жолын көрсетеді.

Егер (8) жүйе үшін

$$y(x_0) = y^0$$

бастапқы шарты қойылса, онда (11) қатынастан:

$$C = \psi(x_0, y^0) = C^0$$

Осы C^0 векторын (10) қатынасқа қойсақ,

$$y = \varphi(x, C^0)$$

түріндегі Коши есебінің шешімін аламыз.

Анықтама-5. D облысында анықталған, өздігінен тұрақты санға айналмайтын, үздіксіз дифференциалданатын $\psi(x, y)$ функциясы (8) жүйенің интегралы деп аталады, егер ол функция y векторының орнына (8) жүйенің кез келген шешімін қойғанда тұрақты санға тепе-тең болса.

Осы функцияны еркін тұрақты санға теңестіру арқылы алынған

$$\psi(x, y) = C \tag{12}$$

қатынасты жүйенің бірінші интегралы деп атайды.

Интегралдың бір қасиетін айта кетейік, $\psi(x, y)$ - үздіксіз диффренциалданатын функция болсын.

Айталық, бірінші интегралдағы y-тің орнына (8) жүйенің бір дербес шешімі қойылған деп. Бұл жағдайда $\psi(x, y(x))$ функциясы тек x айнымалысынан ғана тәуелді болады. Осы функцияны x бойынша дифференциалдасақ, онда (12) қатынастан

$$\frac{d\psi}{dx} = \frac{\partial\psi}{\partial x} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\psi}{\partial y_i} \frac{dy_i}{dx} \equiv 0, \forall x \in \langle a, b \rangle$$

тепе-теңдігін аламыз. Бұдан

$$\frac{\partial\psi(x, y(x))}{\partial x} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\psi(x, y(x))}{\partial y_i} f_i(x, y(x)) \equiv 0, \forall x \in \langle a, b \rangle$$

тепе-теңдігі алынады. Бұдан шығатын қорытынды – жүйе бойынша алынған интегралдың толық туындысы нөлге тепе-тең, яғни

$$\left.\frac{d\psi(x, y)}{dx}\right|_{(8)} = 0, \forall x \in \langle a, b \rangle$$

Осыдан

$$\psi(x, y(x)) = C, \forall x \in \langle a, b \rangle$$

Кей жағдайда интегралдың бұл қасиетін оның анықтамасы ретінде қолданады.

Қалыпты жүйенің n бірінші интегралдары белгілі болса, онда олар жүйенің жалпы шешімін береді.

Жалпы шешімнен C векторының белгілі бір мәнінде шығатын шешімді дербес шешім дейді, ал C векторының тұрақты мәндерінде алынбайтын шешімді ерекше шешім дейді. Бұл түсініктерді басқаша да беруге болатынын 1-тарауда айтқанбыз: әрбір нүктесінде Коши есебінің жалғыздық шарты орындалатын шешімді дербес шешім, ал әрбір нүктесінде Коши есебінің жалғыздық шарты орындалмайтын шешімді ерекше шешім дегенбіз.

Ерекше шешімдер әдетте, теңдеудің оң жағындағы функцияның y бойынша алынған туындыларының шексіздікке айналатын нүктелер жиыны ішінен ізделінеді.

6-ЛЕКЦИЯ. n - ретті біртекті сызықты теңдеулер

Лекция мақсаты: Сызықты теңдеулердің қасиеттерімен таныстыру.
Негізгі сөздер: Сызықты оператор, Вронский анықтауышы, сызықты тәуелділік, тәуелсіздік, Лиувилль формуласы.

Қысқаша мазмұны

3.1. Жоғарғы ретті теңдеулердің ең қарапайымы және оңай зерттелетіні – сызықты теңдеулер.

Белгісіз функция мен оның туындыларын сызықты түрде байланыстыратын теңдеулерді сызықты теңдеулер деп татйды.

n - ретті сызықты теңдеудің жалпы түрі былай жазылады:

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + ... + a_n(x)y = q(x)$$

Мұндағы, $a_i(x)\ (i = 0,...,n), q(x)$- функциялары кейбір $\langle a,b \rangle$ аралығында анықталған нақты үздіксіз функциялар.

Егер $a_0(x) \neq 0, \forall x \in \langle a,b \rangle$ болса, онда соған бөлу арқылы

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + ... + p_n(x)y = f(x) \qquad (1)$$

теңдеуін аламыз. Соңғы түрдегі теңдеуді теңдеудің келтірілген, не қалыпты түрі деп атайды. Мұндағы, $f(x)$ функциясы бос мүше деп аталынады. Егер ол нөлге тең болмаса, (1) теңдеу біртексіз сызықты теңдеу деп, ал нөлге тең болса, біртекті сызықты теңдеу деп аталынады. (1) теңдеудің сәйкес біртектісі былай жазылады:

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + ... + p_n(x)y = 0 \qquad (2)$$

Әдетте, (1) теңдеудің сол жағын қысқартып, былай белгілейді:

$$L[y] = y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + ... + p_n(x)y \qquad (3)$$

Сонда (1) және (2) теңдеулерді былай жазуға болады:

$$L[y] = f(x)$$

және

$$L[y] = 0$$

Енгізілген (3) өрнекті сызықты дифференциалдық оператор деп атайды. Бұл оператор дифференциалдау амалының сызықтығынан шығатын төмендегідей екі шартты қанағаттандырады:

1^0. $L[Cy] = CL[y]$

2^0. $L[y_1 + y_2] = L[y_1] + L[y_2]$

Бұлардың салдары ретінде тағы бір қатынасты жазуға болады:

3^0. $L\left[\sum_{i=1}^{m} C_i y_i\right] = \sum_{i=1}^{m} C_i L[y_i]$

Бұл шарттар дифференциалдық оператордың сызықтығын білдіреді.

3.2. Сызықты теңдеулердің ортақ екі қасиетін келтірейік.

1^0. Тәуелсіз айнымалыны кейбір $\langle c,d \rangle$ аралығында анықталған n рет үздіксіз дифференциалданатын, бірінші туындысы нөлге тең емес функция арқылы жаңа тәуелсіз айнымалымен алмастырғаннан теңдеудің сызықтығы өзгермейді.

Шынында да, $x = \varphi(\tau), \varphi'(\tau) \neq 0, \forall \tau \in \langle c,d \rangle$ алмастыруын жасайық. Сонда

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\tau}\frac{d\tau}{dx} = \frac{1}{\varphi'(\tau)}\frac{dy}{d\tau},$$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{d\tau}\frac{d\tau}{dx} = \frac{1}{\varphi'(\tau)}\frac{d}{d\tau}\left(\frac{1}{\varphi'(\tau)}\frac{dy}{d\tau}\right) =$$

$$= \frac{1}{\varphi'(\tau)}\left(\frac{1}{\varphi'(\tau)}\frac{d^2y}{d\tau^2} - \frac{\varphi''(\tau)}{\varphi'^2(\tau)}\frac{dy}{d\tau}\right)$$

Осылай кез келген $y^{(k)}$-ның сызықты түрде $\frac{dy}{d\tau}, \frac{d^2y}{d\tau^2}, ..., \frac{d^ky}{d\tau^k}$ арқылы өрнектелетінін көреміз. Осы қатынастарды (1) және (2) теңдеулерге апарып қойсақ, қайтадан сызықты теңдеулер аламыз.

2^0. Белгісіз функцияны басқа бір функциямен сызықты түрде алмастырғаннан теңдеудің сызықтығы өзгермейді.

Шынында да, айталық, $y = \alpha(x)z + \beta(x), \alpha(x) \neq 0$ түрінде алмастыру жасалсын. Мұндағы, $\alpha(x)$ және $\beta(x)$ функциялары $\langle a,b \rangle$ аралығында анықталған n рет үздіксіз дифференциалданатын функциялар болсын.

Сонда

$$y' = \alpha(x)z' + \alpha'(x)z + \beta'(x),$$
$$y'' = \alpha(x)z'' + 2\alpha'(x)z' + \alpha''(x)z + \beta''(x),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$y^{(n)} = \alpha(x)z^{(n)} + n\alpha'(x)z^{(n-1)} + ... + \alpha^{(n)}(x)z + \beta^{(n)}(x)$$

Осы туындыларды (1) теңдеуге апарып қойсақ, қайтадан біртексіз сызықты теңдеу аламыз.

Ал (2) теңдеуге апарып қойсақ, онда біртекті теңдеуіміз біртексіз сызықты теңдеуге айналады. Біртектілікті сақтау үшін $y = \alpha(x)z$ түріндегі біртекті алмастыру алу керек.

Сызықты теңдеулердің бір ерекшелігі – олардың бастапқы шартты қанағаттандыратын шешімі бар болу үшін бір-ақ шарттың орындалуы жеткілікті.

Дәлірек айтсақ, мынандай тұжырым орын алады.

Теорема-1. Егер сызықты теңдеудің коэффициенттері мен бос мүшесі кейбір $\langle a,b \rangle$ аралығында анықталған үздіксіз функциялар болса, онда оның бастапқы шартты қанағаттандыратын жалғыз ғана шешімі болады және ол шешім $\langle a,b \rangle$ аралығының өн бойында анықталады.

Бұл тұжырымды дәлелдеу қиындық туғызбайды.

Біртекті сызықты теңдеулер

4.1. Біртекті сызықты теңдеудің шешімдерінің қасиеттерін келтірейік. Коэффициенттері кейбір $\langle a,b \rangle$ аралығында үздіксіз болып келетін мына n-ретті теңдеуді қарастырайық:

$$L[y] = y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + ... + p_n(x)y = 0 \tag{1}$$

Ең алдымен ескеретін жәй – біртекті сызықты теңдеудің барлық жағдайда нольдік шешімі бар. Ол шешім

$$y(x_0) = 0, y'(x_0) = 0, ..., y^{(n-1)}(x_0) = 0 \tag{2}$$

бастапқы шартты қанағаттандыратын Коши есебінің шешімі: $y(x) = 0$. Бұл шешім жалғыз.

Теорема-1. Егер $\varphi_1(x), ..., \varphi_m(x)$ функциялары (1) теңдеудің $\langle a,b \rangle$ аралығындағы шешімдері болса, онда олардың сызықты комбинациясы

$$\varphi(x) = \alpha_1\varphi_1(x) + ... + \alpha_m\varphi_m(x) \tag{3}$$

сол теңдеудің $\langle a,b \rangle$ аралығындағы шешімі болады.

Дәлелдеуі. Шарт бойынша әрбір $\varphi_i(x)$ шешім:

$$L[\varphi_i(x)]=0\,(i=1,...,m),\forall x\in\langle a,b\rangle$$

Енді сызықты дифференциалдық оператордың қасиетін пайдалансақ, онда

$$L\left[\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\varphi_i(x)\right]=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i L[\varphi_i(x)]=0\;,\forall x\in\langle a,b\rangle$$

Теорема-2. Егер (1) теңдеудің $\varphi(x)=u(x)+iv(x)$ түріндегі комплекс шешімі бар болса, онда оның нақты және жорамал бөліктері өз алдына сол теңдеудің шешімдерін береді.

Дәлелдеуі. Шарт бойынша

$$L[\varphi(x)]=L[u(x)+iv(x)]=0\;,\forall x\in\langle a,b\rangle$$

оператордың қасиеті бойынша

$$L[u(x)+iv(x)]=L[u(x)]+iL[v(x)]=0$$

Осыдан $L[u(x)]=0, L[v(x)]=0,\forall x\in\langle a,b\rangle$.

Анықтама-1. Егер $\langle a,b\rangle$ аралығында анықталған $\varphi_1(x),...,\varphi_m(x)$ функциялары үшін бәрі бірдей нөлге тең емес $\alpha_1,...,\alpha_m$ сандары табылып,

$$\alpha_1\varphi_1(x)+...+\alpha_m\,\varphi_m(x)=0,\forall x\in\langle a,b\rangle \tag{4}$$

теңдігі орындалса, онда берілген функциялар жиыны $\langle a,b\rangle$ аралығында сызықты тәуелді деп аталынады, ал (4) теңдік $\alpha_1,...,\alpha_m$ сандарының тек нөлдік мәндерінде ғана орындалса, онда берілген функциялар жиыны $\langle a,b\rangle$ аралығында сызықты тәуелсіз деп аталады.

4.2. Айталық, $\varphi_1(x),...,\varphi_n(x)$ функциялары (1) теңдеудің $\langle a,b\rangle$ аралығында анықталған нақты шешімдері болсын. Осы функциялар мен олардың туындыларынан құрылған төмендегідей n ретті анықтауыш

$$\begin{vmatrix}\varphi_1(x) & ... & \varphi_n(x)\\ \varphi_1'(x) & ... & \varphi_n'(x)\\ \multicolumn{3}{c}{\dots\dots\dots\dots}\\ \varphi_1^{(n-1)}(x) & ... & \varphi_n^{(n-1)}(x)\end{vmatrix}=W[\varphi_1(x),...,\varphi_n(x)] \tag{5}$$

Вронский анықтауышы деп аталады. Қысқаша, оны функциялардың вронскианы дейді. Бұл анықтауышты қысқаша, $W(x)$ деп белгілейді.

Теорема-3. Егер $\varphi_1(x),...,\varphi_n(x)$ шешімдері $\langle a,b\rangle$ аралығында сызықты тәуелді болса, онда олардың вронскианы осы аралықта нөлге тепе-тең.

Дәлелдеуі. Анықтама бойынша бәрі бірдей нөлге тең емес $\alpha_1,...,\alpha_n$ сандары үшін

$$\alpha_1\varphi_1(x)+...+\alpha_n\,\varphi_n(x)=0,\forall x\in\langle a,b\rangle \tag{6}$$

теңдігі орындалады.

Осы қатынасты $n-1$ рет дифференциалдау арқылы сызықты алгебралық жүйе құрайық:

$$\left.\begin{array}{l}\alpha_1\varphi_1(x)+...+\alpha_n\,\varphi_n(x)=0\\ \alpha_1\varphi_1'(x)+...+\alpha_n\,\varphi_n'(x)=0\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \alpha_1\,\varphi_1^{(n-1)}(x)+...+\alpha_n\,\varphi_n^{(n-1)}(x)=0\end{array}\right\} \tag{7}$$

Бұл біртекті сызықты алгебралық жүйенің нөлдік емес шешімі бар болуы үшін оның анықтауышы нөлге тең болуы керек, ал ол анықтауыш Вронский анықтауышы, яғни $W(x)=0$.

Теорема-4. Егер $\varphi_1(x),...,\varphi_n(x)$ шешімдері $\langle a,b\rangle$ аралығында сызықты тәуелсіз болса, онда олардың вронскианы осы аралықтың бірде-бір нүктесінде нөлге айналмайды.

Дәлелдеуі. Кері жориық, кейбір $x_0 \in \langle a,b \rangle$ нүктесі үшін $W(x_0)=0$ болсын. (7) жүйені бір нүкте үшін қайта құрайық:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_1\varphi_1(x_0)+...+\alpha_n\varphi_n(x_0)=0 \\ \alpha_1\varphi_1'(x_0)+...+\alpha_n\varphi_n'(x_0)=0 \\ .... \\ \alpha_1\varphi_1^{(n-1)}(x_0)+...+\alpha_n\varphi_n^{(n-1)}(x_0)=0 \end{array}\right\}$$

Бұл жүйенің анықтауышы $W(x_0)=0$ болғандықтан, нөлге тең емес шешім бар:

$$\alpha_1=\alpha_1^0,...,\alpha_n=\alpha_n^0$$

Осы сандар арқылы құрылған

$$\varphi(x)=\alpha_1^0\varphi_1(x)+...+\alpha_n^0\varphi_n(x)$$

функцияны қарастырайық. Бұл қосынды (1) теңдеудің шешімі болатыны 1-теоремада көрсетілген және ол (2) бастапқы шарттарды қанағаттандырып тұр. Сондықтан, шешімнің жалғыздығы бойынша $\varphi(x)=0$. Демек,

$$\alpha_1^0\varphi_1(x)+...+\alpha_n^0\varphi_n(x)=0$$

Мұндағы, $\alpha_1^0,...,\alpha_n^0$ бәрі бірдей нөлге тең емес. Соңғы қатынас $\varphi_1(x),...,\varphi_n(x)$ функцияларының сызықты тәуелділігін көрсетеді. Ал бұл теореманың шартына қайшы. Сондықтан, $W(x)$ бірде-бір нүктеде нөлге тең болмайды. Бұл шарт әрі жеткілікті – егер берілген шешімдердің вронскианы нөлге тең болмаса, онда олар берілген аралықта сызықты тәуелсіз. Бұл тұжырымды да кері жору арқылы оңай дәлелдеуге болады.

4.3. Анықтама-2. Сызықты біртекті теңдеудің кез келген n сызықты тәуелсіз шешімдер жүйесі осы теңдеудің базисы немесе фундаменталь шешімдер жүйесі деп аталады.

Теорема-5. Біртекті сызықты теңдеудің берілген аралықта базисы әрқашанда бар болады және егер $\varphi_1(x),...,\varphi_n(x)$ базис болса, онда теңдеудің жалпы шешімі төмендегідей түрде жазылады:

$$\varphi(x)=C_1\varphi_1(x)+...+C_n\varphi_n(x) \tag{8}$$

Дәлелдеуі. Кез келген нөлге тең емес n ретті анықтауыш алып, кейбір $x_0 \in \langle a,b \rangle$ нүктесі үшін

$$\varphi_j(x_0)=a_{1j},\varphi_j'(x_0)=a_{2j},...,\varphi_j^{(n-1)}(x_0)=a_{nj},(j=1,...,n) \tag{9}$$

шартын қанағаттандыратын $\varphi_j(x),\ (j=1,...,n)$ шешімдерін құрсақ, онда олардың вронскианы $W(x_0)=W[\varphi_1(x_0),...,\varphi_n(x_0)]\neq 0$. Ал бұл шешімдердің $\langle a,b \rangle$ аралығында сызықты тәуелсіздігін көрсетеді. Мұндай анықтауыштарды шексіз көп ала беруге болады.

Енді (8) қатынастың жалпы шешім болатынын көрсетейік. Біріншіден, бұл қатынас шешімдердің сызықты комбинациясы болуы себепті, $C_1,...,C_n$ сандарының барлық мәндерінде шешім болады. Екіншіден, одан кез келген Коши есебінің шешімін алуға болады. Мынандай бастапқы шарт қоялық:

$$\varphi(x_0)=y_0,\varphi'(x_0)=y_0^1,...,\varphi^{(n-1)}(x_0)=y_0^{n-1} \tag{10}$$

Сонда тұрақты $C_1,...,C_n$ сандарын табу үшін сызықты алгебралық біртексіз жүйе аламыз:

$$\left.\begin{array}{l} C_1\varphi_1(x_0)+...+C_n\varphi_n(x_0)=y_0 \\ C_1\varphi_1'(x_0)+...+C_n\varphi_n'(x_0)=y_0^1 \\ .... \\ C_1\varphi_1^{(n-1)}(x_0)+...+C_n\varphi_n^{(n-1)}(x_0)=y_0^{n-1} \end{array}\right\} \tag{11}$$

Бұл жүйенің анықтауышы $W(x_0)$ және ол нөлге тең емес. Сондықтан, (11) жүйенің жалғыз ғана шешімі бар: $C_1^0,...,C_n^0$. Осы табылған мәндерді (8) қатынасқа қойсақ, (10) бастапқы шартты қанағаттандыратын жалғыз дербес шешім аламыз.

Әдетте, бастапқы анықтауыштың мүшелері ретінде Кронекер символын алуға болады:

$$a_{jk}=\delta_{jk}=\begin{cases}1, \ j=k\\ 0, \ j\neq k\end{cases}$$

Осыған сәйкес бастапқы шартты да мына түрде

$$\varphi_j^{(k)}(x_0)=\delta_{jk},(j=1,...,n;k=1,...,n)$$

алсақ, онда $W(x_0)=1$ болады. Бұл жағдайда фундаменталь шешімдер жүйесі x_0 нүктесінде нормаланған (қалыпталған) деп аталады.

Теорема-6. Берілген фундаменталь шешімдер жүйесі бойынша дифференциалдық теңдеу құруға болады және ол жалғыз болады.

Дәлелдеуі. Айталық, кейбір $\langle a,b\rangle$ аралығында $\varphi_1(x),...,\varphi_n(x)$ базисы берілсін. Онда іздеп отырған теңдеудің кез келген шешімі (8) түрде болатыны белгілі. Осы (8) шешімді пайдаланып $(n+1)$- ретті анықтауышты қарастырайық:

$$W[\varphi_1,\dots,\varphi_n,\varphi]=\begin{vmatrix}\varphi_1 & \dots & \varphi_n & \varphi\\ \varphi_1' & \dots & \varphi_n' & \varphi'\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \varphi_1^{(n)} & \dots & \varphi_n^{(n)} & \varphi^{(n)}\end{vmatrix} \qquad (12)$$

Бұл анықтауыш нөлге тең, өйткені соңғы бағананың мүшелері басқа бағаналарының мүшелерінің сызықты комбинациясы. Соңғы бағанадағы мүшелерді жалпы жағдайда y деп белгілеп, осы бағана бойынша жіктеп жазсақ, n ретті біртекті сызықты теңдеу аламыз. Мұнда ең жоғарғы ретті $y^{(n)}$ туындысының коэффициенті $W[\varphi_1,\dots,\varphi_n]$-ға тең. Ал ол $\langle a,b\rangle$ аралығында нөлге тең емес. Сондықтан, жіктелудің мүшелерін осы $W[\varphi_1,\dots,\varphi_n]$ анықтауышына бөлсек, n ретті сызықты теңдеудің қалыпты түрін аламыз:

$$y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+...+p_n(x)y=0$$

4.4. Жоғарыда келтірілген жіктеуден шығатын Лиувилль формуласын келтірейік.

Құрылған теңдеудің бірінші $p_1(x)$ коэффициенті былай анықталады:

$$p_1(x)=-\frac{\begin{vmatrix}\varphi_1 & \dots & \varphi_n\\ \varphi_1' & \dots & \varphi_n'\\ \dots & \dots & \dots\\ \varphi_1^{(n-2)} & \dots & \varphi_n^{(n-2)}\\ \varphi_1^{(n)} & \dots & \varphi_n^{(n)}\end{vmatrix}}{W(x)} \qquad (13)$$

Анықтауыштың туындысын табу ережесін еске алсақ, (13) қатынастың алымы бөлімінің туындысы болып шығады, яғни

$$p_1(x)=-\frac{W'(x)}{W(x)}$$

Осы қатынасты интегралдасақ,

$$ln|W(x)|=-\int p_1(x)dx+lnC$$

теңдігін аламыз. Осыдан

$$W(x)=Ce^{-\int p_1(x)dx}$$

немесе

$$W(x)=W(x_0)e^{-\int\limits_{x_0}^{x} p_1(x)dx} \tag{14}$$

Осы қатынасты Лиувилль формуласы деп атайды.

Лиувилль формуласын пайдаланып бір шешімі белгілі екінші ретті біртекті сызықты теңдеудің жалпы шешімін құруға болады.

Егер $\ddot{x}+p_1(t)\dot{x}+p_2(t)x=0$ теңдеуінің $x_1=\varphi_1(t)$ шешімі белгілі болса, онда Лиувилль формуласы былай жазылады:

$$\begin{vmatrix} \varphi_1 & x \\ \dot{\varphi}_1 & \dot{x} \end{vmatrix} = C_1 e^{-\int p_1(t)dt}$$

немесе

$$\varphi_1\dot{x}-x\dot{\varphi}_1=C_1e^{-\int p_1(t)dt}$$

Соңғы теңдікті $\dfrac{1}{\varphi_1^{\,2}}$ функциясына көбейтіп интегралдасақ, онда

$$\left(\frac{x}{\varphi_1}\right)'=C_1\frac{1}{\varphi_1^{\,2}}e^{-\int p_1(t)dt}$$

теңдігінен

$$\frac{x}{\varphi_1}=C_1\int\frac{e^{-\int p_1(t)dt}}{\varphi_1^{\,2}}dt+C_2$$

теңдігін аламыз. Осыдан

$$x(t)=C_2\varphi_1(t)+C_1\varphi_1(t)\int\frac{e^{-\int p_1(t)dt}}{\varphi_1^{\,2}}dt \tag{15}$$

Мұндағы, $\varphi_2(t)=\varphi_1(t)\int\dfrac{e^{-\int p_1(t)dt}}{\varphi_1^{\,2}}dt$ функциясы теңдеудің екінші дербес шешімін береді. Оған – теңдеуге қойып көз жеткізуге болады және бұл $\varphi_1(t)$ және $\varphi_2(t)$ шешімдер өзара тәуелсіз. Сондықтан, (15) қатынас жалпы шешім болады.

7-ЛЕКЦИЯ. Біртексіз сызықты теңдеулер

Лекция мақсаты: Біртексіз сызықты теңдеулердің қасиеттерімен таныстыру.
Негізгі сөздер: Тұрақты санды вариациялау, суперпозиция, жалпы шешім.
Қысқаша мазмұны
Біртексіз сызықты теңдеулер

5.1. Төмендегідей біртексіз сызықты теңдеуді қарастырайық:

$$L[y]=y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+\ldots+p_n(x)y=f(x) \tag{1}$$

Мұнда да коэффициенттер мен бос мүше кейбір $\langle a,b\rangle$ аралығында үздіксіз функциялар деп есептелінеді. Осы теңдеудің сәйкес біртектісін қоса қарастырайық:

$$L[y]=y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+\ldots+p_n(x)y=0 \tag{2}$$

Бұл екі теңдеудің шешімдерінің арасында тығыз байланыстар бар.

1^0. Егер $\tilde{y}$ біртексіз (1) теңдеудің шешімі, ал y_1 біртекті (2) теңдеудің шешімі болса, онда $y=\tilde{y}+y_1$ функциясы (1) теңдеудің шешімін береді.

Шынында да, $L[\tilde{y}]=f(x), L[y_1]=0, \forall x\in\langle a,b\rangle$. Осыдан $L[\tilde{y}+y_1]=L[\tilde{y}]+L[y_1]=f(t), \forall x\in\langle a,b\rangle$.

2^0. Егер $\tilde{y}_1$ және $\tilde{y}_2$ функциялары (1) теңдеудің шешімдері болса, онда олардың айырмасы (2) теңдеудің шешімін береді.

Шыныда да, $L[\tilde{y}_1]=f(x), L[\tilde{y}_2]=f(x)$. Осыдан

$$L[\tilde{y}_1-\tilde{y}_2]=L[\tilde{y}_1]-L[\tilde{y}_2]=f(x)-f(x)=0, \forall x\in\langle a,b\rangle .$$

3^0. Егер (1) теңдеуде $f(x)=\sum_{i=1}^{m} f_i(x)$ болса, ал y_i функциясы $L[y]=f_i(x)$ теңдеуінің шешімі болса, онда

$$L\left[\sum_{i=1}^{m} y_i\right]=\sum_{i=1}^{m} L[y_i]=\sum_{i=1}^{m} f_i(x), \forall x\in\langle a,b\rangle$$

Бұл қасиетті суперпозиция қасиеті деп атайды.

4^0. Егер (1) теңдеудің оң жағы комплексты функция болса $f(x)=u(x)+iv(x)$, ал $y(x)=\alpha(x)+i\beta(x)$ комплексты функция сол теңдеудің шешімі болса, онда нақты $\alpha(x)$ және $\beta(x)$ функциялары сәйкес $L[y]=u(x)$ және $L[y]=v(x)$ теңдеулерінің шешімдері болады.

Шынында да, $L[\alpha(x)+i\beta(x)]\equiv u(x)+iv(x)$. Осыдан $L[\alpha(x)]\equiv u(x), L[\beta(x)]\equiv v(x)$ тепе-теңдіктері шығады.

Осы қасиеттерді пайдалансақ, төмендегідей қорытындыға келеміз.

Теорема. Біртексіз (1) теңдеудің жалпы шешімі осы теңдеудің бір дербес шешімі мен сәйкес біртекті (2) теңдеудің жалпы шешімінің қосындысынан тұрады.

Дәлелдеуі. Айталық, $y_1, y_2,..., y_n$ біртекті (2) теңдеудің фундаменталь шешімдер жүйесі болсын, ал $\tilde{y}$ функциясы біртексіз (1) теңдеудің бір дербес шешімі болсын. Бұл жағдайда

$$y(x)=\tilde{y}(x)+\sum_{i=1}^{n} C_i y_i(x) \tag{3}$$

қосындысы берілген аралықта (1) теңдеудің жалпы шешім болатынын көрсетейік. Мұнда $C_1,...,C_n$ - еркін тұрақтылар. 1^0 - қасиет бойынша (3) қосынды (1) теңдеудің шешімі:

$$L\left[\tilde{y}+\sum_{i=1}^{n} C_i y_i\right]=L[\tilde{y}]+\sum_{i=1}^{n} C_i L[y_i]=f(x), \forall x\in\langle a,b\rangle$$

Енді осы шешімнен кез келген Коши есебінің жалғыз ғана шешімін алуға болатынын көрсетсек, жеткілікті. Бастапқы шартты

$$y(x_0)=y_0, y'(x_0)=y_0^{\,1},..., y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{\,n-1} \tag{4}$$

түрінде алсақ, онда төмендегідей жүйе аламыз:

$$\left.\begin{array}{l} y_0=\tilde{y}(x_0)+\sum_{i=1}^{n} C_i y_i(x_0) \\ y_0^{\,1}=\tilde{y}'(x_0)+\sum_{i=1}^{n} C_i y_i'(x_0) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_0^{\,n-1}=\tilde{y}^{(n-1)}(x_0)+\sum_{i=1}^{n} C_i y_i^{(n-1)}(x_0) \end{array}\right\} \tag{5}$$

Бұл жүйе $C_1,...,C_n$ сандары бойынша сызықты біртексіз алгебралық жүйе. Оның анықтауышы $\Delta=W(x_0)\neq 0$. Сондықтан, жүйенің нөлдік емес жалғыз ғана шешімі бар: $C_1^{\,0},...,C_n^{\,0}$. Осы сандарды (3) қатынасқа қойсақ, (1) теңдеудің (4) шартты қанағаттандыратын жалғыз ғана шешім аламыз.

5.2. Біртексіз теңдеудің жалпы шешімін табу үшін әдетте, тұрақтыларды вариациялау әдісі қолданылады. Бұл әдістің мәнісі – сәйкес біртекті теңдеудің жалпы шешімі белгілі деп, ондағы еркін тұрақтыларды x-қа байланысты айнымалы шамалар деп есептелініп, шешім мына түрде ізделінеді:

$$y = \sum_{i=1}^{n} C_i(x) y_i \tag{6}$$

мұндағы, $y_1, y_2, ..., y_n$- біртекті теңдеудің фундаменталь шешімдері. Осындағы $C_1(x), ..., C_n(x)$ функцияларын (6) қосынды (1) теңдеудің шешімі болатындай етіп таңдайды. Бұл функцияларды анықтау үшін n теңдеу керек. Ол үшін (6) өрнекті n ретке дейін дифференциалдаймыз. Мұнда $C_1(x), ..., C_n(x)$ функцияларының туындыларына қосымша шарт қойылып отырады.

Сонымен,

$$y' = \sum_{i=1}^{n} C_i(x) y_i' + \sum_{i=1}^{n} C_i'(x) y_i$$

Осындағы екінші қосындыны нөлге теңейміз:

$$\sum_{i=1}^{n} C_i'(x) y_i = 0$$

Қалған бірінші қосындыдан екінші туынды табамыз:

$$y'' = \sum_{i=1}^{n} C_i(x) y_i'' + \sum_{i=1}^{n} C_i'(x) y_i'$$

Осындағы екінші қосындыны тағы да нөлге теңейміз:

$$\sum_{i=1}^{n} C_i'(x) y_i' = 0$$

Осылай қосындыны $n-1$ рет дифференциалдап, $C_1'(x), ..., C_n'(x)$ туындыларының қосындысын әрдайым нөлге теңеп отырамыз. Сонда

$$y^{(n-1)} = \sum_{i=1}^{n} C_i(x) y_i^{(n-1)},$$

$$\text{ал } y^{(n)} = \sum_{i=1}^{n} C_i(x) y_i^{(n)} + \sum_{i=1}^{n} C_i'(x) y_i^{(n-1)}$$

Соңғы екінші қосындыны нөлге теңестірмейді. Ол қосынды (1) теңдеудің оң жағындағы $f(x)$ функциясына тең деп алынады.

Себебі, (6) өрнекті және оның туындыларын (1) теңдеуге апарып қойсақ, төмендегідей теңдік аламыз:

$$L[y] = C_1(x) L[y_1] + ... + C_n(x) L[y_n] +$$
$$+ C_1'(x) y_1^{(n-1)} + ... + C_n'(x) y_n^{(n-1)} = f(x)$$

мұнда $L[y_1] = ... = L[y_n] = 0$. Сонымен, $C_1'(x), ..., C_n'(x)$ функцияларын анықтау үшін мынандай жүйе аламыз:

$$\left.\begin{array}{l} C_1'(x) y_1 + ... + C_n'(x) y_n = 0 \\ .... \\ C_1'(x) y_1^{(n-2)} + ... + C_n'(x) y_n^{(n-2)} = 0 \\ C_1'(x) y_1^{(n-1)} + ... + C_n'(x) y_n^{(n-1)} = f(x) \end{array}\right\} \tag{7}$$

Бұл $C_1'(x), ..., C_n'(x)$ функциялары бойынша сызықты біртексіз алгебралық жүйе. Оның анықтауышы Вронский анықтауышы, ал ол нөлге тең емес. Өйткені, $y_1, y_2, ..., y_n$ шешімдері өзара сызықты тәуелсіз. Осы жүйені Крамер ережесі бойынша шешсек,

$$C_i'(x) = \frac{W_{ni}(x) f(x)}{W(x)}, (i = 1, ..., n) \tag{8}$$

өрнегін аламыз. Мұндағы, $W_{ni}(x)$ - Вронский анықтауышының n -ші жатық жолы мен i -нші тік жолының қиылысында тұрған элементтің алгебралық толықтауышы.

Соңғы қатынасты интегралдап, $C_i(x)$ функциясын табамыз:

$$C_i(x)=\int_{x_0}^{x}\frac{W_{ni}(\tau)f(\tau)}{W(\tau)}d\tau+C_i^0,(i=1,...,n) \tag{9}$$

Мұндағы, C_i^0 -еркін тұрақтылар. Табылған осы $C_1(x),...,C_n(x)$ функцияларды (6) қатынасқа қойсақ,

$$y=\sum_{i=1}^{n}y_i\int_{x_0}^{x}\frac{W_{ni}(\tau)f(\tau)}{W(\tau)}d\tau+\sum_{i=1}^{n}C_i^0y_i$$

функциясын аламыз. Бұл функция өзінің құрылымы бойынша (1) теңдеудің шешімі. Мұндағы, бірінші қосынды (1) теңдеудің дербес шешімін, екінші қосынды біртекті теңдеудің жалпы шешімін білдіреді. Сонымен, бастапқы айтылған қағидаға қайта келдік: біртексіз теңдеудің жалпы шешімі осы теңдеудің бір дербес шешімі мен оның сәйкес біртектісінің жалпы шешімінің қосындысынан тұрады.

8-ЛЕКЦИЯ. Тұрақты коэффициентті сызықты біртекті теңдеулерді интегралдау

Лекция мақсаты: Тұрақты коэффициентті теңдеулердің фундаменталь шешімдерін табу әдістерімен таныстыру.
Негізгі сөздер: Фундаменталь шешімдер жүйесі, базис, Эйлер әдісі, квазикөпмүшелік.
Қысқаша мазмұны
Тұрақты коэффициентті сызықты теңдеулерді интегралдау

6.1. Алдымен біртекті теңдеуді қарастырайық:

$$L[y]=y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+...+a_ny=0 \tag{1}$$

Мұндағы, a_i - тұрақты нақты сандар.

Бұл теңдеудің шешімін Эйлер ұсынған әдіс бойынша

$$y=e^{\lambda x} \tag{2}$$

түрінде іздейміз. Мұндағы, λ - белгісіз тұрақты сан. Осы өрнекті (1) теңдеудің сол жағына қойсақ,

$$L\left[e^{\lambda x}\right]=\lambda^ne^{\lambda x}+\lambda^{n-1}a_1e^{\lambda x}+...+a_ne^{\lambda x}=P(\lambda)e^{\lambda x} \tag{3}$$

қатынасын аламыз. Мұнда

$$P(\lambda)=\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+...+a_n \tag{4}$$

(3) қатынастан $e^{\lambda x}$ функциясы теңдеудің шешімі болу үшін λ санының $P(\lambda)=0$ теңдеуінің шешімі болуы керек екенін көреміз, яғни

$$P(\lambda)=\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+...+a_n=0 \tag{5}$$

Соңғы теңдеуді сипаттаушы теңдеу деп, ал оның түбірлерін сипаттаушы сандар деп атайды.

Сипаттаушы сандардың түрлеріне байланысты фундаменталь шешімдер жүйесі әртүрлі болады. Сол жағдайларды қарастырайық.

1^0. Сипаттаушы $\lambda_1,...,\lambda_n$ сандары әртүрлі нақты сандар болсын.

Бұл сандарды кезекпен (2) қатынасқа қойып, n дербес шешім табамыз:

$$y_1=e^{\lambda_1x},...,y_n=e^{\lambda_nx} \tag{6}$$

Олардың сызықты тәуелсіздігін көрсету үшін Вронский анықтауышын құрайық:

$$W(x)=\begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & \dots & e^{\lambda_n x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \dots & \lambda_n e^{\lambda_n x} \\ \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{n-1} e^{\lambda_1 x} & \dots & \lambda_n^{n-1} e^{\lambda_n x} \end{vmatrix} = e^{(\lambda_1+\dots+\lambda_n)x} \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \dots & \lambda_n \\ \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Соңғы анықтауыш Вандермонд анықтауышы деп аталады. Ол $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ сандары әртүрлі болғанда нөлге айналмайды, яғни $W(x)\neq 0$. Сондықтан, (6) функциялар жиыны берілген теңдеудің фундаменталь шешімдер жүйесін құрайы. Бұл жағдайда жалпы шешім

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + \dots + C_n e^{\lambda_n x} \tag{7}$$

түрінде жазылады. Мұндағы, $C_1,\dots,C_n$ - еркін тұрақты сандар.

2^0. Сипаттаушы сандардың ішінде комплексты сандар кездессін. Айталық, $\lambda_1 = a+ib$ - сипаттаушы теңдеудің жәй түбірі болсын. Онда оның түйіндесі $\lambda_2 = \overline{\lambda_1} = a-ib$ саны да сол теңдеудің түбірі болады. Бұл жағдайда $a+ib$ түбіріне сәйкес шешім

$$y_1 = e^{(a+ib)x} \tag{8}$$

түрінде жазылады. Бұл комплексты функция. Өткен параграфта көрсетілген сызықты теңдеудің шешімдерінің қасиеті бойынша оның нақты және жорамал бөліктері өз алдына берілген теңдеудің шешімдері болады. Сондықтан,

$$y_{11} = Re\, y_1 = e^{ax}\cos bx,\ y_{12} = Im\, y_1 = e^{ax}\sin bx \tag{9}$$

функциялары (1) теңдеудің шешімдері болады және олар өзара сызықты тәуелсіз. Ал $\overline{\lambda_1} = a-ib$ түбіріне сәйкес шешім де сол өзара тәуелсіз екі функцияны береді:

$$e^{ax}\cos bx,\ -e^{ax}\sin bx \tag{10}$$

Бұлардың біріншісі, алдыңғымен бірдей; екіншісі, тек таңбасымен өзгеше, яғни (9) және (10) функциялар өзара сызықты тәуелді. Сондықтан, өзара түйіндес комплекс түбір үшін (9) түріндегі екі нақты функция алынады. Осы сияқты, кез келген қос комплексты түбір үшін екі нақты функциялар алынып отырады. Оларға қоса нақты түбірлерге сәйкес қойылатын шешімдерді алсақ, олардың жиыны берілген теңдеудің фундаменталь шешімдер жүйесін құрайды.

3^0. Сипаттаушы теңдеудің түбірлерінің кейбіреулері еселікті түбірлер болсын.

Айталық, λ_1-саны сипаттаушы теңдеудің k-еселікті түбірі болсын. Бұл жағдайда

$$P(\lambda_1) = P'(\lambda) = \dots = P^{(k-1)}(\lambda) = 0,\ P^{(k)}(\lambda_1)\neq 0 \tag{11}$$

шарттары орындалады.

$$L\left[e^{\lambda x}\right] = P(\lambda)e^{\lambda x}$$

тепе-теңдігін λ бойынша m рет дифференциалдайық:

$$L\left[\lambda^m e^{\lambda x}\right] = \sum_{\nu=0}^{m} C_m^\nu P^{(\nu)}(\lambda) x^{m-\nu} e^{\lambda x} \tag{12}$$

Осыдан (11) шартты ескерсек:

$$L\left[\lambda^m e^{\lambda_1 x}\right] \equiv 0,\ m = 0,1,\dots,k-1$$

болатынын көреміз, яғни

$$e^{\lambda_1 x}, xe^{\lambda_1 x}, \dots, x^{k-1}e^{\lambda_1 x} \tag{13}$$

функцияларының (1) теңдеудің шешімдері болатынын көреміз. Бұл шешімдердің де өзара сызықты тәуелсіз екенін көрсету қиын емес. Мұнда, λ_1-саны нақты болса, онда (13) функциялар да нақты функциялар болады.

Егер сипаттаушы теңдеудің комплексты $\lambda_1 = a+ib$ түбірі k еселікті түбір болса, оның түйіндесі $\overline{\lambda_1} = a-ib$ түбірі де k еселікті болады. Бұл жағдайда да алдыңғы (13) шешімдер сияқты төмендегідей k шешім аламыз:

$$e^{(a+ib)x}, xe^{(a+ib)x}, \dots, x^{k-1}e^{(a+ib)x} \tag{14}$$

Осы комплексты функциялардың нақты және жорамал бөліктерін ажыратсақ, онда $2k$ нақты функциялардың жиынын аламыз:

$$\begin{aligned} &e^{ax}\cos bx, xe^{ax}\cos bx, \ldots, x^{k-1}e^{ax}\cos bx, \\ &e^{ax}\sin bx, xe^{ax}\sin bx, \ldots, x^{k-1}e^{ax}\sin bx \end{aligned} \qquad (15)$$

Бұл функциялардың да сызықты тәуелсіздігін дәлелдеу қиын емес. Түйіндес $a-ib$ түбірі жаңа тәуелсіз шешімдер тудырмайды.

Сонымен, әрбір нақты, комплексты, еселікті түбірлерге сәйкес қойылатын шешімдерді есептесек, барлығы n нақты шешімдер аламыз. Олардың сызықты комбинациясы берілген теңдеудің жалпы шешімін береді.

9-ЛЕКЦИЯ. Тұрақты коэффициентті сызықты біртексіз теңдеулерді интегралдау

Лекция мақсаты: Тұрақты коэффициентті сызықты біртексіз теңдеулерді интегралдау жолдарымен танысу.

Негізгі сөздер: Фундаменталь шешімдер жүйесі, базис, Эйлер әдісі, квазикөпмүшелік.

Енді тұрақты коэффициентті біртексіз теңдеуді қарастырайық:

$$L[y] = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = f(x) \qquad (16)$$

Мұнда a_i-сандары нақты, ал $f(x)$- функциясы кейбір $\langle a,b \rangle$ аралығында үздіксіз деп алынады.

Өткен параграфта көрсетілгендей, біртексіз сызықты теңдеудің жалпы және дербес шешімдерін жалпы жағдайда тұрақтыларды вариациялау арқылы анықтауға болады. Кейбір жағдайларда $f(x)$ функциясының түріне байланысты шешімді алгебралық амалдардың көмегімен интегралсыз-ақ табуға болады.

Айталық, $f(x)$ функциясы квазикөпмүшелік түрде берілсін, яғни

$$f(x) = P_m(x)e^{\alpha x} \qquad (17)$$

Мұнда $P_m(x)$-дәрежесі m-ге тең көпмүшелік:

$$P_m(x) = p_0 x^m + p_1 x^{m-1} + \ldots + p_m \qquad (18)$$

Сонымен,

$$L[y] = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = P_m(x)e^{\alpha x} \qquad (19)$$

Дербес шешімді құрудың екі жағдайы қарастырылады.

1^0. α-саны сипаттаушы теңдеудің түбірі емес. Бұл жағдайда дербес шешім мына түрде ізделінеді:

$$y_1 = Q_m(x)e^{\alpha x} \qquad (20)$$

Мұнда

$$Q_m(x) = q_0 x^m + q_1 x^{m-1} + \ldots + q_m \qquad (21)$$

Осы (20) өрнекті (19) теңдеуге қойып, алдын ала $e^{\alpha x}$ функциясына қысқартып, x-тың әртүрлі дәрежелерінің коэффициенттерін теңестіретін болсақ, $q_0, q_1, \ldots, q_m$-коэффициенттері төмендегідей теңдеулерден бірмәнді түрде анықталады:

$$\left.\begin{aligned} &q_0 P(\alpha) = p_0, \\ &q_0 C_m^1 P'(\alpha) + q_1 P(\alpha) = p_1, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &q_0 C_m^m P^{(m)}(\alpha) + \ldots + q_{m-1}P'(\alpha) + q_m P(\alpha) = p_m \end{aligned}\right\} \qquad (22)$$

Мұнда $P(\alpha) \neq 0$, өйткені α-саны сипаттаушы теңдеудің түбірі емес.

2^0. α-саны сипаттаушы теңдеудің k-еселікті түбірі болсын, яғни

$$P(\alpha) = P'(\alpha) = \ldots = P^{(k-1)}(\alpha) = 0, P^{(k)}(\alpha) \neq 0 \qquad (23)$$

Бұл жағдайда дербес шешім

$$y_1 = x^k Q_m(x) e^{\alpha x} \tag{24}$$

түрінде ізделінеді. Мұнда да (24) өрнекті (19) теңдеуге қоятын болсақ, $q_0, q_1, ..., q_m$ - сандарын табу үшін төмендегідей алгебралық теңдеулер аламыз:

$$\left.\begin{array}{l} q_0 C_{k+m}^{k} P^{(k)}(\alpha) = p_0, \\ q_0 C_{k+m}^{k+1} P^{(k+1)}(\alpha) + q_1 C_{k+m-1}^{k} P^{(k)}(\alpha) = p_1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ q_0 C_{k+m}^{k+m} P^{(k+m)}(\alpha) + ... + q_m C_k^k P^{(k)}(\alpha) = p_m \end{array}\right\} \tag{25}$$

Мұнда $P^{(k)}(\alpha) \neq 0$ болғандықтан, барлық коэффициенттер бір мәнді түрде анықталады.

Ескерту. Егер (16) теңдеудің оң жағы тригонометриялық квазиполином түрінде берілсе, яғни

$$f(x) = P_m^{(1)}(x) e^{\alpha x} \cos bx + P_m^{(2)}(x) e^{\alpha x} \sin bx$$

түрінде берілсе, онда $\cos bx$ және $\sin bx$ функцияларын Эйлер формуласы бойынша

$$\cos bx = \frac{e^{ibx} + e^{-ibx}}{2}, \sin bx = \frac{e^{ibx} - e^{-ibx}}{2i}$$

түрінде жазып, алдыңғы жағдайға келтіруге болады.

Мысалдар.

1. $y'' - 3y' + 2y = 0$ теңдеуінің жалпы шешімін табу керек болсын. Ол үшін сипаттаушы теңдеу құрамыз: $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$. Бұл теңдеудің түбірлері: $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$. Сәйкес дербес шешімдер: $y_1 = e^x, y_2 = e^{2x}$.

Жалпы шешім: $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$.

2. $y'' - 4y' + 5y = 0$ теңдеуінің жалпы шешімін табу керек болсын. Ол үшін сипаттаушы теңдеу құрамыз: $\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0$. Бұл теңдеудің түбірлері: $\lambda_{1,2} = 2 \pm i$. Дербес шешімдер: $y_1 = e^{2x} \cos x, y_2 = e^{2x} \sin x$.

Жалпы шешім: $y = e^{2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$.

3. $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$. Сипаттаушы теңдеу құрамыз: $\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = 0$ немесе $(\lambda - 1)^3 = 0$. Осыдан $\lambda_{1,2,3} = 1$. Жалпы шешім: $y = e^x(C_1 + C_2 x + C_3 x^2)$.

4. $y'' - 9y = 5e^{2x}$. Сипаттаушы теңдеу: $\lambda^2 - 9 = 0$, $\lambda_{1,2} = \pm 3$. Біртекті теңдеудің жалпы шешімі: $y_0 = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-3x}$. Біртексіздің дербес шешімін: $\tilde{y} = Ae^{2x}$ түрінде іздейміз. Осыдан $A = -1$ болатынын көреміз. Сондықтан, біртексіз берілген теңдеудің жалпы шешімі

$$y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-3x} - e^{2x}$$

функциясы болады.

10-ЛЕКЦИЯ. Біртекті сызықты жүйелер

Лекция мақсаты: Сызықты жүйелердің жалпы қасиеттерімен таныстыру. Біртекті жүйенің шешімдерінің қасиеттерімен таныстыру.

Негізгі сөздер: вектор, матрица, фундаменталь матрица, Лиувилль формуласы, Коши функциясы.

Қысқаша мазмұны

Сызықты жүйелердің жалпы қасиеттері

1.1. Қарапайым теңдеулер жүйелердің ең маңызды дербес түрі – сызықты жүйелер болып есептелінеді. Оның скалярлық түрдегі жазылуы төмендегідей болады:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{dx_1}{dt} = p_{11}(t)x_1 + \ldots + p_{1n}(t)x_n + f_1(t)\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \dfrac{dx_n}{dt} = p_{n1}(t)x_1 + \ldots + p_{nn}(t)x_n + f_n(t)\end{array}\right\} \quad (1)$$

Мұндағы, $p_{ij}(t)$ және $f_i(t)$ функциялары кейбір $\langle a,b\rangle$ аралығында анықталған нақты үздіксіз функциялар деп қарастырылады. Бұл жүйені былайша жазуға да болады:

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} p_{ij}(t)x_j + f_i(t),(i=1,\ldots,n) \quad (2)$$

Егер $P(t) = \left(p_{ij}(t)\right),(i=1,\ldots,n)$ матрицасын енгізсек, ал x пен f-ты вектор немесе бір бағаналы матрицалар деп қарастырсақ, онда берілген жүйені төмендегідей векторлы-матрицалық түрде жазуға болады:

$$\frac{dx}{dt} = P(t)x + f(t) \quad (3)$$

Бұл қатынасты жүйе деумен қатар (оның векторлық мағынасын ескеріп), бір теңдеу деп те айтуға болады.

Әдетте, $f(t)$ – вектор-функцияны бос мүше деп атайды. Егер осы бос мүше нөлге тең болса, онда (3) жүйенің орнына оның біртектісін аламыз:

$$\frac{dx}{dt} = P(t)x \quad (4)$$

Бос мүше нөлге тең болмағанда (3) жүйені (4) жүйенің сәйкес біртексізі деп атайды.

Бұл жүйелер үшін Коши есебі мына түрде қойылады: барлық векторлардың ішінен

$$\varphi(t_0) = x^0, t_0 \in \langle a,b\rangle$$

бастапқы шартын қанағаттандыратын шешімді табу керек. Мұндағы, x^0 - берілген бастапқы вектор.

1.2. Сызықты жүйелердің жалпы қасиеттерін келтірейік:

1^0. Тәуелсіз айнымалыны үздіксіз дифференциалданатын функция арқылы басқа бір тәуелсіз айнымалымен алмастырғаннан жүйенің сызықтығы өзгермейді.

Шынында да, $t = \varphi(\tau), \varphi'(\tau) \neq 0, \forall \tau \in \langle c,d\rangle$ алмастыруын жасайық. Туындыны жаңа айнымалы арқылы өрнектейік:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{d\tau}\cdot\frac{d\tau}{dt} = \frac{dx}{d\tau}\cdot\frac{1}{\varphi'(\tau)}$$

Осыдан,

$$\frac{1}{\varphi'(\tau)}\cdot\frac{dx}{d\tau} = P[\varphi(\tau)]x + f[\varphi(\tau)]$$

немесе

$$\frac{dx}{d\tau} = P[\varphi(\tau)]\varphi'(\tau)x + f[\varphi(\tau)]\varphi'(\tau)$$

яғни,

$$\frac{dx}{d\tau} = \overline{P}(\tau)x + \overline{f}(\tau) \quad (5)$$

түріндегі жаңа сызықты жүйеге қайта келдік.

2^0. Белгісіз функцияны сызықты түрлендіргеннен жүйенің сызықтығы өзгермейді.

Шынында да, айталық $x = \alpha(t)y + \beta(t)$ түрінде алмастыру жасалсын. Мұнда $\alpha(t)=(\alpha_{ij}),(i,j=1,...,n)$ ерекше емес матрица, яғни оның анықтауышы нөлге тең емес. Осы қатынастан туынды алып берілген жүйенің өзін пайдалансақ, мынандай қатынастар аламыз:

$$\frac{dx}{dt}=\alpha\frac{dy}{dt}+\frac{d\alpha}{dt}y+\frac{d\beta}{dt}$$

яғни,

$$P(t)[\alpha y+\beta]+f=\alpha\frac{dy}{dt}+\frac{d\alpha}{dt}y+\frac{d\beta}{dt}$$

Осыдан,

$$\frac{dy}{dt}=\alpha^{-1}\left[P(t)\alpha-\frac{d\alpha}{dt}\right]y+\alpha^{-1}\left[P(t)\beta+f(t)-\frac{d\beta}{dt}\right]$$

немесе

$$\frac{dy}{dt}=\overline{P}(t)y+\overline{f}(t)$$

Мұндағы,

$$\overline{P}(t)=\alpha^{-1}\left[P(t)\alpha-\frac{d\alpha}{dt}\right],$$

$$\overline{f}(t)=\alpha^{-1}\left[P(t)\beta+f(t)-\frac{d\beta}{dt}\right]$$

Біртекті сызықты жүйелер

2.1. Төмендегідей біртекті сызықты теңдеулер жүйесін қарастырайық:

$$\frac{dx}{dt}=P(t)x \tag{1}$$

Осы жүйенің шешімдерінің кейбір қасиеттерін келтірейік. Ең алдымен ескеретін жәй – біртекті жүйенің бастапқы Коши есебінің $x(t_0)=0$ шартын қанағаттандыратын нөлдік $x(t)=0$ шешімі барлық уақытта бар және ол шешім жалғыз.

Теорема-1. Егер $\varphi^1(t),...,\varphi^n(t)$ – вектор-функциялары (1) жүйенің шешімдері болса, олардың кез келген сызықты комбинациясы да сол жүйенің шешімі болады.

Дәлелдеуі. Берілген функциялардың нақты сандар өрісіндегі сызықты комбинациясын алайық:

$$\varphi(t)=\alpha_1\varphi^1(t)+...+\alpha_n\varphi^n(t) \tag{2}$$

Мұндағы, әрбір $\varphi^i(t)$ функциясы үшін

$$\frac{d\varphi^i(t)}{dt}=P(t)\varphi^i(t),\forall t\in\langle a,b\rangle$$

тепе-теңдігі орындалады.

Осыдан,

$$\frac{d\varphi(t)}{dt}=\alpha_1\frac{d\varphi^1(t)}{dt}+...+\alpha_n\frac{d\varphi^n(t)}{dt}=\sum_{i=1}^{n}\alpha_iP(t)\varphi^i(t)=$$

$$=P(t)\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\varphi^i(t)=P(t)\varphi(t),\forall t\in\langle a,b\rangle$$

Теорема-2. Егер (1) жүйенің комплексты $\varphi(t)=u(t)+iv(t)$ шешімі бар болса, онда оның нақты және жорамал бөліктері өз алдарына (1) жүйенің шешімін береді.

Дәлелдеуі. Шарт бойынша

$$\frac{d\varphi(t)}{dt}=\frac{du(t)}{dt}+i\frac{dv(t)}{dt}=P(t)\big(u(t)+iv(t)\big)=P(t)u(t)+iP(t)v(t)$$

Осыдан,

$$\frac{du(t)}{dt}=P(t)u(t),\frac{dv(t)}{dt}=P(t)v(t),\forall t\in\langle a,b\rangle \qquad (3)$$

Анықтама-1. Егер $\langle a,b\rangle$ аралығында анықталған $\varphi^1(t),...,\varphi^n(t)$ функциялары үшін бәрі бірдей нөлге тең емес $\alpha_1,...,\alpha_n$ сандары табылып,

$$\alpha_1\varphi^1(t)+...+\alpha_n\varphi^n(t)=0,\forall t\in\langle a,b\rangle \qquad (4)$$

теңдігі орындалса, онда берілген функциялар жиыны $\langle a,b\rangle$ аралығында сызықты тәуелді деп аталынады, ал (4) теңдік $\alpha_1,...,\alpha_n$ сандарының тек нөлдік мәндерінде ғана орындалса, онда берілген функциялар жиыны $\langle a,b\rangle$ аралығында сызықты тәуелсіз деп аталады.

Ескерту. Егер берілген функциялар жиыны $\langle a,b\rangle$ аралығында сызықты тәуелді болса, онда сол аралыққа жататын кез келген $t_0\in\langle a,b\rangle$ нүктесінде де тәуелді болады. Кері ұйғарым орындалмайды, өйткені бұл жағдайда $\alpha_1,...,\alpha_n$ сандары t_0-ға тәуелді болады. Ал егер берілген функциялар жиыны белгілі бір дифференциалдық теңдеулер жүйесінің шешімдері болса, онда бір нүктедегі тәуелділік пен тәуелсіздік сәйкес аралықтағы тәуелділік пен тәуелсіздікке эквивалент.

Анықтама-2. Біртекті сызықты жүйенің $\langle a,b\rangle$ аралығында анықталған n сызықты тәуелсіз шешімдер жиынын сол жүйенің осы аралықтағы базисі немесе фундаменталь шешімдер жүйесі деп атайды.

2.2. Айталық, $\varphi^1(t),...,\varphi^n(t)$ вектор-функциялары (1) жүйенің шешімдері болсын. Әрбір бағанасы осы векторлардың координаттарынан тұратын төмендегідей матрица құрайық:

$$\Phi(t)=\begin{pmatrix}\varphi_{11}(t) & ... & \varphi_{1n}(t)\\ \multicolumn{3}{c}{......................}\\ \varphi_{n1}(t) & ... & \varphi_{nn}(t)\end{pmatrix} \qquad (5)$$

Осы матрицаның анықтауышын Вронский анықтауышы немесе вронскиан деп атайды және оны $W(t)$ - деп белгілейді. Сонымен,

$$W(t)=W\left[\varphi^1(t),...,\varphi^n(t)\right]=det\Phi(t) \qquad (6)$$

Егер (5) матрицаның анықтауышы нөлге тең болмаса, онда ол матрица фундаменталь матрица деп аталынады.

Теорема-3. Егер $\varphi^1(t),...,\varphi^n(t)$ функциялары $\langle a,b\rangle$ аралығында сызықты тәуелді болса, онда осы аралықта олардың вронскианы нөлге тең болады.

Дәлелдеуі. Анықтама бойынша

$$\alpha_1\varphi^1(t)+...+\alpha_n\varphi^n(t)=0 \qquad (7)$$

мұнда $\alpha_1,...,\alpha_n$ сандарының бәрі бірдей нөл емес. Соңғы қатынасты координаттар бойынша ашып жазсақ, төмендегідей біртекті сызықты жүйе аламыз:

$$\left.\begin{array}{l}\alpha_1\varphi_{11}(t)+\ ...+\alpha_n\varphi_{1n}(t)=0\\ ....\\ \alpha_1\varphi_{n1}(t)+\ ...+\alpha_n\varphi_{nn}(t)=0\end{array}\right\} \qquad (8)$$

Бұл жүйенің нөлдік емес шешімі бар болу үшін оның анықтауышы нөлге тең болуы шарт, яғни $W(t)=0,\forall t\in\langle a,b\rangle$.

Теорема-4. Егер $\varphi^1(t),...,\varphi^n(t)$ функциялары (1) жүйенің $\langle a,b\rangle$ аралығындағы сызықты тәуелсіз шешімдері болса, онда осы аралықтың кез келген нүктесінде вронскиан нөлге тең болмайды.

Дәлелдеуі. Кері жориық. Айталық, кейбір $t_0\in\langle a,b\rangle$ нүктеде $W(t_0)=0$ болсын. Белгісіз $\alpha_1,...,\alpha_n$ сандары арқылы төмендегідей теңдік құрайық:

$$\alpha_1\varphi^1(t_0)+\ ...+\alpha_n\varphi^n(t_0)=0 \qquad (9)$$

немесе координаттары бойынша:

$$\left.\begin{array}{l}\alpha_1\varphi_{11}(t_0)+\ ...+\alpha_n\varphi_{1n}(t_0)=0\\ ....\\ \alpha_1\varphi_{n1}(t_0)+\ ...+\alpha_n\varphi_{nn}(t_0)=0\end{array}\right\} \qquad (10)$$

Бұл жүйенің анықтауышы нөлге тең, өйткені ол анықтауыш $W(t_0)$. Сондықтан, оның нөлдік емес шешімі бар: $\alpha_1^{\,0},...,\alpha_n^{\,0}$.

Берілген шешімдердің сызықты комбинациясын қарастырайық:

$$x(t)=\alpha_1^{\,0}\varphi^1(t)+\ ...+\alpha_n^{\,0}\varphi^n(t) \qquad (11)$$

Бұл вектор-функция берілген жүйенің шешімі болады (теорема-1).
Осындағы $\alpha_1^{\,0},...,\alpha_n^{\,0}$ сандары (9) теңдікті қанағаттандырғандықтан, $x(t_0)=0$ теңдігі орындалады, яғни (11) шешімнің бастапқы мәні нөлге тең. Шешімнің жалғыздық шарты бойынша $x(t)$ нөлдік шешім. Сондықтан,

$$x(t)=\alpha_1^{\,0}\varphi^1(t)+\ ...+\alpha_n^{\,0}\varphi^n(t)=0, \forall t\in\langle a,b\rangle \qquad (12)$$

Соңғы тепе-теңдік $\varphi^1(t),...,\varphi^n(t)$ векторларының сызықты тәуелділігін көрсетеді. Бұл - теореманың шартына қайшы.

Соңғы екі теореманы біріктіріп айтсақ, мынандай қорытындыға келеміз: (1) жүйенің n шешімі $\langle a,b\rangle$ аралығында сызықты тәуелсіз болу үшін олардың вронскианының $\langle a,b\rangle$ аралығының бірде-бір нүктесінде нөлге тең болмауы қажетті және жеткілікті.

Теорема-5. Егер $P(t)$ матрицасы $\langle a,b\rangle$ аралығында үздіксіз болса, онда (1) жүйенің базисы әрқашанда бар болады және егер $\varphi^1(t),...,\varphi^n(t)$ жүйенің базисы болса, онда оның жалпы шешімі мына түрде жазылады:

$$x(t)=C_1\varphi^1(t)+\ ...+C_n\varphi^n(t) \qquad (13)$$

мұндағы, $C_1,...,C_n$ - кез келген тұрақты сандар.

Дәлелдеуі. Кез келген сызықты тәуелсіз n векторлар: $a^1,...,a^n$ үшін кейбір $t_0\in\langle a,b\rangle$ нүктесінде

$$\varphi^1(t_0)=a^1,...,\varphi^n(t_0)=a^n \qquad (14)$$

шартын қанағаттандыратын шешімдер жиынын алсақ, жеткілікті. Бастапқы $\varphi^1(t_0),...,\varphi^n(t_0)$ мәндері сызықты тәуелсіз болғандықтан, бұл шешімдер $\langle a,b\rangle$ аралығында да тәуелсіз, яғни олар (1) жүйенің базисын құрайды.

Енді (13) қатынастың жалпы шешім болатынын көрсетейік. Біріншіден, бұл қатынас шешімдердің сызықты комбинациясы болғандықтан, $C_1,...,C_n$ сандарының барлық мәндерінде жүйенің шешімі болады (теорема-1). Екіншіден, одан кез келген Коши есебінің шешімін алуға болады. Ол үшін

$$x(t_0)=x^0 \qquad (15)$$

шартын қоялық, яғни

$$C_1\varphi^1(t_0)+\ ...+C_n\varphi^n(t_0)=x^0 \qquad (16)$$

Бұл векторлық теңдікті координаттары бойынша ашып жазсақ,

$$\left.\begin{array}{l}C_1\varphi_{11}(t_0)+\ ...+C_n\varphi_{1n}(t_0)=x_{10}\\ ....\\ C_1\varphi_{n1}(t_0)+\ ...+C_n\varphi_{nn}(t_0)=x_{n0}\end{array}\right\} \qquad (17)$$

жүйесін аламыз. Оның анықтауышы нөлге тең емес. Сондықтан, (17) жүйенің тек жалғыз ғана шешімі бар: $C_1^{\,0},...,C_n^{\,0}$. Осы тұрақтыларды (13) қатынасқа қойсақ, (15) шартты қанағаттандыратын дербес шешім аламыз.

2.3. Жалпы шешімді фундаменталь матрица арқылы жазуға болады. Айталық, $\Phi(t)$ берілген (1) жүйенің фундаменталь матрицасы болсын. Оның әрбір бағанасы тәуелсіз векторлардың координаттары болғандықтан, бұл матрица матрицалық

$$\frac{dX}{dt} = P(t)X \tag{18}$$

теңдеудің шешімі болады, яғни

$$\frac{d\Phi(t)}{dt} = P(t)\Phi(t), \forall t \in \langle a,b \rangle \tag{19}$$

Осы матрицаны пайдалансақ, жалпы шешім

$$x(t) = \Phi(t)C \tag{20}$$

түрінде жазылады. Мұнда C - кез келген тұрақты вектор. Бұл қатынастан Коши есебінің шешімін анықтауға болады: (15) бастапқы шартты пайдалансақ,

$$x^0 = \Phi(t_0)C$$

теңдігін аламыз. Осыдан $C^0 = \Phi^{-1}(t_0)x^0$. Сонда

$$x(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)x^0 \tag{21}$$

түріндегі дербес шешім аламыз. Егер $\Phi(t)\Phi^{-1}(t_0) = K(t,t_0)$ белгілеуін енгізсек, соңғы теңдік былай жазылады:

$$x(t) = K(t,t_0)x^0 \tag{22}$$

Осындағы $K(t,t_0)$ матрицасын Коши матрицасы деп атайды.

Егер соңғы қатынастағы t_0-ді тұрақталған сан, ал x^0-ді тұрақталмаған вектор деп есептесек, онда (22) қатынасты жүйенің Коши түріндегі жалпы шешімі деп атайды.

Егер кейбір $t_0 \in \langle a,b \rangle$ нүктесінде $\Phi(t_0) = E$ теңдігі орындалса, онда $\Phi(t)$ матрицасы t_0 нүктесінде қалыпталған (нормаланған) деп аталады. Бұл жағдайда шешім

$$x(t) = \Phi(t)x^0 \tag{23}$$

түрінде жазылады.

Теорема-6. Егер $\Phi(t)$ фундаменталь матрица болса, онда $\Psi(t) = \Phi(t)C$ матрицасы да фундаменталь матрица болады. Мұнда C - тұрақты $(n \times n)$ - өлшемді ерекше емес матрица.

Шынында да,

$$\frac{d\Psi(t)}{dt} = \frac{d(\Phi C)}{dt} = \frac{d\Phi}{dt}C$$

Ал $\Phi(t)$ матрицасы (18) матрицалық теңдеуді қанағаттандыратындықтан,

$$\frac{d(\Phi C)}{dt} = (P\Phi)C = P(\Phi C)$$

тепе-теңдігін аламыз, яғни $\Psi(t) = \Phi(t)C$ матрицасы да (18) матрицалық теңдеуді қанағаттандырады. Оның үстіне

$$\det\Psi(t) = \det\Phi(t) \cdot \det C \neq 0$$

2.4. Лиувилль формуласын келтірейік.

Алдымен, n-ші ретті анықтауыштың туындысы қалай ашылатынын көрсетейік.

n-ші ретті анықтауыштың туындысы сол анықтауыштың әр бағанасы (немесе әр жатық жолы) кезекпен туындыларымен ауыстырылған n анықтауыштардың қосындысынан тұрады. Осы ереже бойынша вронскианның туындысын ашайық:

$$\dot{W}(t) = \sum_{i=1}^{n} \begin{vmatrix} \varphi_{11} \cdots \dot{\varphi}_{1i} \cdots \varphi_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \varphi_{j1} \cdots \dot{\varphi}_{ji} \cdots \varphi_{jn} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \varphi_{n1} \cdots \dot{\varphi}_{ni} \cdots \varphi_{nn} \end{vmatrix} \tag{24}$$

Мұндағы, φ_{ji} берілген жүйенің шешімі болғандықтан,

$$\dot{\varphi}_{ji}(t) = \sum_{k=1}^{n} p_{jk}(t)\varphi_{ki}(t), (i, j = 1,...,n)$$

Осы өрнектерді анықтауыштың i-нші бағанасына қойсақ, анықтауыштың қасиеттері бойынша, $k = j$ болатын қосындыдан басқа анықтауыштардың бәрі нөлге тең болады, өйткені олардың екі бағанасы өзара пропорционал болады. Сондықтан,

$$\dot{W}(t) = \sum_{j=1}^{n} p_{jj}(t)W(t)$$

Осыдан

$$W(t) = W(t_0)e^{\int_{t_0}^{t} trP(t)dt} \tag{25}$$

Мұндағы, $trP(t) = \sum_{j=1}^{n} p_{jj}(t)$ - берілген $P(t)$ матрицасының ізі деп аталады.

Осы (25) теңдікті Лиувилль формуласы деп атайды. Бұл формуладан мынандай қорытынды шығады: егер $\langle a,b \rangle$ аралығының бір нүктесінде вронскиан нөлге тең болса, ол бүкіл аралықта нөлге тең болады, ал $\langle a,b \rangle$ аралығының бір нүктесінде нөлге тең болмаса, онда ол бүкіл аралықта нөлге тең болмайды.

2.5. Айталық, $\Phi(t)$ - фундаменталь матрица болсын.
$\Phi^{-1}(t)\Phi(t) = E$ тепе-теңдігін дифференциалдайық:

$$\frac{d}{dt}(\Phi^{-1}\Phi) = \frac{d\Phi^{-1}}{dt}\Phi + \Phi^{-1}\frac{d\Phi}{dt} = 0$$

Осыдан

$$\frac{d\Phi^{-1}}{dt} = -\Phi^{-1}\frac{d\Phi}{dt}\Phi^{-1} = -\Phi^{-1}P\Phi\Phi^{-1} = -\Phi^{-1}P$$

немесе

$$\frac{d\Phi^{-1}}{dt} = -\Phi^{-1}P$$

Соңғы қатынастағы матрицаларды аударсақ,

$$\frac{d(\Phi^{-1})^T}{dt} = -P^T(\Phi^{-1})^T$$

теңдігін аламыз. Бұдан шығатын қорытынды, $\Psi(t) = (\Phi^{-1})^T$ матрицасы

$$\frac{dy}{dt} = -P(t)y \tag{27}$$

теңдеуінің фундаменталь матрицасы болатынын көреміз. Осы (27) жүйені берілген (1) жүйенің түйіндесі деп атайды. Егер $\Psi_1(t)$ осы жүйенің кейбір фундаменталь матрицасы болса, онда

$$\Psi_1(t) = (\Phi^{-1})^T C$$

қатынасы орын алады. Мұнда C -ерекше емес матрица. Осыдан

$$\Psi_1^T(t) = C^T \Phi^{-1}$$

немесе

$$\Psi_1^T(t)\Phi(t) = C^T = B$$

Соңғы теңдіктен мынаны көреміз: $\Psi_1^T(t)$- матрицасының жатық жолы (27) жүйенің шешімдері болатынын, $\Phi(t)$ матрицасының бағаналары (1) жүйенің шешімдері болатыны, ал олардың көбейтіндісі тұрақты екенін көреміз.

11-ЛЕКЦИЯ. Біртексіз сызықты жүйелер

Лекция мақсаты: Біртексіз сызықты жүйелердің қасиеттерімен таныстыру.

Негізгі сөздер:

Қысқаша мазмұны

Біртексіз сызықты жүйелер

3.1. Біртексіз сызықты теңдеулер жүйесін қарастырайық:

$$\dot{x} = P(t)x + f(t) \tag{1}$$

Айталық, кейбір $\varphi(t)$ функциясы (1) жүйенің дербес шешімі болсын. Осы жүйеге

$$x = y + \varphi \tag{2}$$

түрінде алмастыру жасайық. Екі жағынан да туынды алып, сол жүйенің өзін пайдалансақ, төмендегідей теңдік аламыз:

$$P(t)(y+\varphi) + f(t) = \dot{y} + \dot{\varphi}$$

Ал бұдан шығатыны

$$\dot{y} = P(t)y \tag{3}$$

Бұл біртекті сызықты жүйе. Осы жүйенің жалпы шешімін тауып, оны (2) қатынастағы y-тің орнына қойсақ, (1) жүйенің жалпы шешімін табамыз.

Қорытындылап айтсақ, біртексіз жүйенің жалпы шешімі осы жүйенің дербес шешімі мен оның сәйкес біртектісінің жалпы шешімінің қосындысына тең.

Ал біртекті (3) жүйенің жалпы шешімі

$$y = \Phi(t)C \tag{4}$$

түрінде жазылатыны белгілі. Мұндағы, $\Phi(t)$ - (3) жүйенің фундаменталь матрицасы, C - бір бағаналы матрица. Сондықтан, (1) жүйенің жалпы шешімі

$$x = \Phi(t)C + \varphi \tag{5}$$

түрінде жазылады. Бұл шешімнің жалпы шешім болатынын көрсету үшін одан кез келген Коши есебінің шешімін алуға болатынын дәлелдесек, жеткілікті. Ол үшін $t = t_0$ болғанда $x(t_0) = x^0$ болатын шартты қанағаттандыратын векторды табу мүмкіншілігін қарастырайық:

$$x^0 = \Phi(t_0)C + \varphi(t_0) \tag{6}$$

Теңдіктегі $\Phi(t_0)$ фундаменталь матрица болғандықтан, $\langle a,b \rangle$ аралығындағы кез келген нүктеде оның анықтауышы нөлге тең емес, яғни оның кері матрицасы бар. Сондықтан,

$$C = \Phi^{-1}(t_0)(x^0 - \varphi(t_0)) \tag{7}$$

Осы векторды (5) қатынасқа қойып, керекті шешімді аламыз:

$$x(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)(x^0 - \varphi(t_0)) + \varphi(t)$$

немесе

$$x(t) = K(t,t_0)(x^0 - \varphi(t_0)) + \varphi(t) \tag{8}$$

Мұндағы, $K(t,t_0) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)$ - Коши функциясы.

3.2. Біртексіз сызықты жүйенің жалпы шешімін табу үшін әдетте, тұрақтыларды вариациялау әдісі қолданылады. Мұны Лагранж әдісі деп те атайды. Ол үшін біртекті жүйенің жалпы шешіміндегі тұрақты C векторын t - ға байланысты функция деп, біртексіз жүйенің шешімін

$$X(t) = \Phi(t)C(t) \tag{9}$$

түрінде іздейміз. Екі жағынан туынды алып, берілген (1) жүйені пайдаланып, мынандай теңдеу аламыз:

$$\Phi(t)\dot{C}(t)+\dot{\Phi}(t)C(t)=P(t)\Phi(t)C(t)+f(t)$$

Ал

$$\dot{\Phi}(t)=P(t)\Phi(t) \tag{10}$$

тепе-теңдігін ескерсек, онда

$$\Phi(t)\dot{C}(t)=f(t)$$

Осыдан

$$\dot{C}(t)=\Phi^{-1}(t)f(t) \tag{11}$$

Бұл теңдеудің шешімі интегралдау арқылы былай жазылады:

$$C(t)=C^0+\int_{t_0}^{t}\Phi^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau \tag{12}$$

мұндағы, $C^0=C(t_0)=colon(C_1^{\,0},...,C_n^{\,0})$ - тұрақты вектор. Табылған $C(t)$ - ның мәнін (9) – қатынасқа қойып, біртексіз (1) жүйенің жалпы шешімін табамыз:

$$x(t)=\Phi(t)C^0+\int_{t_0}^{t}\Phi(t)\Phi^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau \tag{13}$$

Бұл жалпы шешімдегі тұрақты C^0 - векторын анықтау үшін формулада $t=t_0$ деп алсақ, онда $C^0=\Phi^{-1}(t_0)x^0$. Сондықтан

$$x(t)=\Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)x^0+\int_{t_0}^{t}\Phi(t)\Phi^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau \tag{14}$$

немесе Коши функциясын енгізсек, онда шешім мына түрде жазылады:

$$x(t)=K(t,t_0)x^0+\int_{t_0}^{t}K(t,\tau)f(\tau)d\tau \tag{15}$$

Бұл қатынас Коши формуласы деп аталынады. Осындағы фундаменталь $\Phi(t)$ матрицасы $t=t_0$ нүктесінде нормаланған болса, яғни $\Phi(t_0)=E$ болса, онда формула мына түрде жазылады:

$$x(t)=\Phi(t)x^0+\int_{t_0}^{t}K(t,\tau)f(\tau)d\tau$$

Егер $P(t)$ матрицасы тұрақты болса, яғни $P(t)=A$ - тұрақты болса және $\Phi(t_0)=E$ болса, онда $\Phi(t)=e^{A(t-t_0)}$. Бұл жағдайда жалпы шешім мына түрде жазылады:

$$x(t)=e^{A(t-t_0)}x^0+\int_{t_0}^{t}e^{A(t-\tau)}f(\tau)d\tau \tag{16}$$

Соңғы формулада t_0 - тұрақталған сан деп, ал x^0 - векторын кез келген тұрақты вектор деп қарастырсақ, онда (16) формула Коши түріндегі жалпы шешімді білдіреді.

3.3. Тұрақты сандарды вариациялаудың екінші түрін келтірейік.

Біртексіз жүйенің жалпы және дербес шешімін іздегенде $C(t)$ векторын координаттары бойынша іздеген қолайлы. Олардың туындылары сызықты алгебралық жүйенің шешімдері ретінде анықталады.

Айталық, $\varphi^1(t),...,\varphi^n(t)$ вектор - функциялары (3) жүйенің фундаменталь шешімдер жүйесі болсын. Онда осы жүйенің жалпы шешімі

$$y=\sum_{i=1}^{n}C_i\varphi^i(t)$$

түрінде жазылады. Мұндағы, C_i - еркін тұрақтылар.Енді (1) жүйенің жалпы шешімін табу үшін осы C_i - лерді t - ға байланысты үздіксіз дифференциалданатын белгісіз функциялар деп есептейік, яғни

$$y=\sum_{i=1}^{n}C_i(t)\varphi^i(t) \tag{17}$$

Егер осы вектор-функцияны (1) жүйеге қойсақ, белгісіз $C_i(t)$ және оның туындысы $\dot{C}_i(t)$ бойынша төмендегідей векторлық теңдеу алынады:

$$\sum_{i=1}^{n}\dot{C}_i(t)\varphi^i(t)+\sum_{i=1}^{n}C_i(t)\dot{\varphi}^i(t)=P(t)\sum_{i=1}^{n}C_i(t)\varphi^i(t)+f(t)$$

Осыдан, $\dot{\varphi}^i(t)=P(t)\varphi^i(t)$ екенін ескерсек,

$$\sum_{i=1}^{n}\dot{C}_i(t)\varphi^i(t)=f(t) \tag{18}$$

түріндегі векторлық теңдеу аламыз. Оны координаттары бойынша ашып жазсақ, төмендегідей n скалярлық теңдеулер жүйесін аламыз:

$$\left.\begin{array}{l}\dot{C}_1(t)\varphi_{11}(t)+\dot{C}_2(t)\varphi_{12}(t)+...+\dot{C}_n(t)\varphi_{1n}(t)=f_1(t)\\ \dot{C}_1(t)\varphi_{21}(t)+\dot{C}_2(t)\varphi_{22}(t)+...+\dot{C}_n(t)\varphi_{2n}(t)=f_2(t)\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \dot{C}_1(t)\varphi_{n1}(t)+\dot{C}_2(t)\varphi_{n2}(t)+...+\dot{C}_n(t)\varphi_{nn}(t)=f_n(t)\end{array}\right\} \tag{19}$$

Бұл жүйе алгебралық сызықты біртексіз жүйе. Ал оның негізгі анықтауышы Вронский анықтауышы болғандықтан, ол нөлге тең емес. Крамер ережесі бойынша барлық $\dot{C}_i(t)$ функциялары бір мәнді болып анықталады:

$$\dot{C}_i(t)=\frac{W_i(t)}{W(t)}=g_i(t),(i=1,...,n) \tag{20}$$

Осыдан

$$C_i(t)=C_i^0+\int g_i(t)dt,(i=1,...,n) \tag{21}$$

Бұл функцияларды (17) қатынасқа қойсақ,

$$y=\sum_{i=1}^{n}C_i^0\varphi^i(t)+\sum_{i=1}^{n}\varphi^i(t)\int g_i(t)dt \tag{22}$$

түріндегі (1) жүйенің жалпы шешімін аламыз. Мұндағы, бірінші қосынды біртекті (3) жүйенің жалпы шешімін береді де, екінші қосынды (1) жүйенің дербес шешімін береді. Сонымен, бастапқы тұжырымға қайта келдік: біртексіз сызықты жүйенің жалпы шешімі сәйкес біртекті жүйенің жалпы шешімі мен біртексіз жүйенің дербес шешімінің қосындысынан тұрады.

12-ЛЕКЦИЯ. Тұрақты коэффициентті сызықты біртекті жүйелерді интегралдау

Лекция мақсаты: Тұрақты коэффициентті **с**ызықты біртекті жүйелерді интегралдау әдістерімен таныстыру.

Негізгі сөздер: Сипаттаушы теңдеу, меншікті сандар, меншікті векторлар, квазикөпмүшелік.

Қысқаша мазмұны

Тұрақты коэффициентті сызықты біртекті жүйелерді интегралдау

4.1. Коэффициенттері тұрақты біртекті сызықты жүйені қарастырайық:

$$\frac{dx}{dt}=Ax \tag{1}$$

Мұнда $x=colon(x_1,...,x_n),A=(a_{ij})$ - тұрақты нақты квадрат матрица.

Бұл жүйенің шешімін Эйлер әдісі бойынша

$$x = \alpha e^{\lambda t} \tag{2}$$

түрінде іздейміз. Мұнда λ-белгісіз сан, α-нөлдік емес белгісіз тұрақты вектор.

Осы (2) өрнекті (1) жүйеге қойсақ,

$$(A - \lambda E)\alpha = 0 \tag{3}$$

түріндегі векторлық алгебралық теңдеу аламыз. Бұл теңдеуді ашып жазсақ,

$$\left.\begin{array}{l} (a_{11} - \lambda)\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + ... + a_{1n}\alpha_n = 0 \\ a_{21}\alpha_1 + (a_{22} - \lambda)\alpha_2 + ... + a_{2n}\alpha_n = 0 \\ .... \\ a_{n1}\alpha_1 + a_{n2}\alpha_2 + ... + (a_{nn} - \lambda)\alpha_n = 0 \end{array}\right\} \tag{4}$$

түріндегі сызықты теңдеулер жүйесін аламыз. Жүйенің нөлдік емес шешімі бар болуы үшін оның анықтауышы нөлге тең болуы керек:

$$|A - \lambda E| = 0 \tag{5}$$

немесе

$$\begin{vmatrix} (a_{11} - \lambda) & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & (a_{22} - \lambda) & ... & a_{2n} \\ .... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & (a_{nn} - \lambda) \end{vmatrix} = 0 \tag{6}$$

Осы теңдеу берілген жүйенің сипаттаушы теңдеуі деп аталады. Оның түбірлері A матрицасының меншікті сандары (мәндері), ал әрбір меншікті санға сәйкес α векторын A матрицасының меншікті векторы деп атайды.

Меншікті сандардың түрлеріне байланысты фундаменталь матрица әртүрлі болады.Сол жағдайларды қарастырайық.

1^0. Айталық, меншікті сандар әртүрлі нақты сандар болсын: $\lambda_1,...,\lambda_n$. Осындағы белгілі бір λ_i меншікті санына сәйкес α_i векторының координаттары (4) жүйеден табылады. Ол үшін λ-ның орнына λ_i-ді қою керек. Егер $x_i = colon(x_{1i},...,x_{ni})$, ал $\alpha_i = colon(\alpha_{1i},...,\alpha_{ni})$ деп алсақ, онда λ_i-ге сәйкес шешім

$$x_{1i}(t) = \alpha_{1i}e^{\lambda_i t},...,x_{ni}(t) = \alpha_{ni}e^{\lambda_i t} \tag{7}$$

түрінде жазылады. Сондықтан, бұл жағдайда фундаменталь матрица былай жазылады:

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} x_{11} & ... & x_{1n} \\ .... \\ x_{n1} & ... & x_{nn} \end{pmatrix} \tag{8}$$

Бұл матрицаның анықтауышы нөлге тең емес, өйткені оның әрбір бағанасы өзара тәуелсіз. Сондықтан, жалпы шешім

$$x(t) = C_1\alpha_1 e^{\lambda_1 t} + ... + C_n\alpha_n e^{\lambda_n t} \tag{9}$$

түрінде жазылады немесе матрица түрінде

$$x(t) = \Phi(t)C \tag{10}$$

Мұндағы, C-бір бағаналы тұрақты матрица.

2^0. Айталық, $\lambda_1 = a + ib$ - сипаттаушы теңдеудің жәй түбірі болсын. Онда оның түйіндесі $\overline{\lambda}_1 = a - ib$ саны да сол теңдеудің түбірі болады. Бұл жағдайда сәйкес шешім

$$x_1(t) = (\gamma_{11} + i\gamma_{12})e^{(a+ib)t} \tag{11}$$

түрінде жазылады. Соңғы қатынастың нақты және жорамал бөліктерін ажыратайық:

$$x_1(t) = (\gamma_{11} + i\gamma_{12})e^{at}(cosbt + i\,sin\,bt) =$$

$$= e^{at}(\gamma_{11}cosbt - \gamma_{12}sin\,bt) + ie^{at}(\gamma_{12}cosbt + \gamma_{11}sin\,bt)$$

Жүйенің коэффициенттері нақты болғандықтан, комплекс шешімнің нақты және жорамал бөліктері өз алдарына нақты шешімдер болып табылады. Сондықтан,

$$\begin{aligned} x_{11}(t) &= Re\, x_1(t) = e^{at}(\gamma_{11}\cos bt - \gamma_{12}\sin bt) \\ x_{12}(t) &= Im\, x_1(t) = e^{at}(\gamma_{12}\cos bt + \gamma_{11}\sin bt) \end{aligned} \qquad (12)$$

функциялары берілген жүйенің нақты шешімдері болады. Бұл шешімдер өзара сызықты тәуелсіз.Түйіндес $a-ib$ түбірі жаңа тәуелсіз шешімдер тудырмайды. Демек, бір пар комплексті түбірге өзара тәуелсіз екі нақты шешім сәйкес келеді. Олар өзара сызықты тәуелсіз болғандықтан, фундаменталь шешімдер жүйесіне кіреді. Осы сияқты, барлық түбірлер үшін нақты шешімдерді құрып шығуға болады. Олардың сызықты комбинациясы жүйенің жалпы шешімін береді.

3^0. Сипаттаушы теңдеудің түбірлерінің кейбіреулері еселікті түбірлер болатын жағдайды қарастырайық.

Айталық, λ_1-саны k - еселікті түбір болсын. Бұл түбірге бір немесе бірнеше меншікті векторлар сәйкес келуі мүмкін. Олардың саны жалпы алғанда k-дан аспайды. Сондықтан, (2) формула бойынша анықталатын шешімдердің саны k-дан кем болуы мүмкін. Осы жетпей жатқан шешімдерді толықтыру үшін төмендегідей әдіс қолданылады.

Айталық, $x(t)$ векторы (1) жүйенің шешімі болсын.

$D=\dfrac{d}{dt}$ - дифференциалдық оператор енгізу арқылы берілген жүйені координаттары бойынша ашып жазайық:

$$a_{i1}x_1 + ... + a_{in}x_n - Dx_i = 0, (i = 1,...,n) \qquad (13)$$

Бұл сызықты жүйенің анықтауышы $|A-ED| = M(D)$. Ол D-операторы бойынша n дәрежелі көпмүшелік. Егер D-ның орнына λ-ны қойсақ, ол сипаттаушы көпмүшелікке айналады.

Құрылған (13) қатынасты $|A-ED|$ анықтауышының алгебралық толықтауышы $A_{ij}(D)$-ға көбейтіп, i-индексі бойынша қосындыласақ,

$$M(D)x_i = 0, (i = 1,...,n) \qquad (14)$$

теңдеуін аламыз. Бұл x_i бойынша n-ретті дифференциалдық теңдеу. Оның сипаттаушы көпмүшелігі (1) жүйенің сипаттаушы көпмүшелігіне тең. Сондықтан, (5) теңдеудің k-еселікті λ_1 түбіріне сәйкес келетін (1) жүйенің $x(t)$ шешімінің i-інші компоненті мына түрде жазылады:

$$x_i(t) = (C_{1i} + C_{2i}t + ... + C_{ki}t^{k-1})e^{\lambda_1 t}$$

Мұнда C_{ki}- тұрақты сандар. Сонымен,

$$x(t) = \begin{pmatrix} C_{11} + C_{21}t + ... + C_{k1}t^{k-1} \\ .... \\ C_{1n} + C_{2n}t + ... + C_{kn}t^{k-1} \end{pmatrix} e^{\lambda_1 t} \qquad (15)$$

Бұл шешімдегі $C_{ij}\ (i = 1,...,k;\ j = 1,...,n)$ тұрақты сандарының бәрі бірдей еркін бола алмайды, өйткені $x(t)$ шешімінің компоненттері (13) қатынас арқылы өзара сызықты байланысқан. Бұл тұрақтылардың ішінде тәуелсіздерінің саны λ_1 - түбірінің еселігіне тең, яғни k-ға тең. Осы еркін тұрақтыларды $C_1,...,C_k$- деп белгілейік. (15) шешімді (1) жүйеге қойып, алдын ала $e^{\lambda_1 t}$ - ға қысқартып, t-ның бірдей дәрежелерінің коэффициенттерін теңестірсек, k біртекті теңдеулердің сызықты жүйесін аламыз. Ондағы белгісіз C_{ij} тұрақтыларының саны $k \times n$. Оларды $C_1,...,C_k$ еркін тұрақтылары арқылы өрнектесек, онда (15) шешімді былай жазуға болады:

$$x(t) = [C_1 p_1(t) + ... + C_k p_k(t)]e^{\lambda_1 t} \qquad (16)$$

Мұндағы, $p_i(t)$ - векторларының компоненттері t бойынша дәрежелері $k-1$ - ден аспайтын көпмүшеліктер құрайды.

Сонымен, сипаттаушы теңдеудің k еселікті λ_1 түбіріне $p_i(t)e^{\lambda_1 t}$ түріндегі шешім сәйкес қойылды. Осы сияқты кез келген k_s еселікті λ_s түбіріне де сәйкес шешім құрып шығуға болады. Олардың жиыны берілген жүйенің фундаменталь шешімдер жүйесі болатынын көрсету үшін вронскианның $t=0$ нүктесінде нөлге айналмайтынын көрсетсе, жеткілікті (дәлірек, дәлелдеуді [5] оқу құралынан көруге болады).

13-ЛЕКЦИЯ. Тұрақты коэффициентті сызықты біртексіз жүйелерді интегралдау

Лекция мақсаты: Тұрақты коэффициентті **с**ызықты біртексіз жүйелерді интегралдау әдістерімен тансытыру.

Негізгі сөздер: Сипаттаушы теңдеу, меншікті сандар, меншікті векторлар, квазикөпмүшелік.

Қысқаша мазмұны

Тұрақты коэффициентті сызықты біртексіз жүйелерді интегралдау

Тұрақты коэффициентті біртексіз жүйені қарастырайық:

$$\frac{dx}{dt} = Ax + f(t) \tag{17}$$

Мұнда $x = colon(x_1,...,x_n)$, $f(t) = colon(f_1,...,f_n)$, $A = (a_{ij})$- квадрат матрица. Оның сәйкес біртектісі:

$$\frac{dx}{dt} = Ax \tag{18}$$

жүйесінің жалпы шешімі элементар функциялар арқылы өрнектелетіні өткен пунктте көрсетілді. Жалпы жағдайда біртексіз жүйенің жалпы шешімі тұрақтыларды вариациялау арқылы оңай табылады.

Егер (17) жүйедегі $f(t)$ вектор-функция квазикөпмүшелік түрінде берілсе, онда жүйенің дербес шешімін анықталмаған коэффициенттер әдісін қолданып табуға болады. Табылған дербес шешімді біртекті жүйенің жалпы шешімімен қоссақ, берілген (17) жүйенің жалпы шешімін аламыз.

Айталық, біртексіз жүйе төмендегідей түрде берілсін:

$$\frac{dx}{dt} = Ax + P_m(t)e^{\alpha t} \tag{19}$$

Мұндағы, $P_m(t)$ - дәрежесі m-нен аспайтын көпмүшелікті вектор, яғни

$$P_m(t) = \sum_{k=0}^{m} p_k t^k \, , \tag{20}$$

мұндағы p_k - тұрақты векторлар.

Бұл жерде екі жағдай қарастырылады.

1^0. Резонанс емес жағдай: α саны A матрицасының меншікті саны емес. Бұл жағдайда дербес шешім

$$x(t) = Q_m(t)e^{\alpha t} \tag{21}$$

түрінде ізделінеді. Мұнда $Q_m(t)$ - вектор:

$$Q_m(t) = \sum_{k=0}^{m} q_k t^k \tag{22}$$

мұнда q_k - белгісіз тұрақты вектор.

Осы өрнекті (19) теңдікке қойып, t-ның әртүрлі дәрежелерінің алдындағы коэффициенттерін теңестіреміз:

$$(\alpha E - A)Q_m(t) = P_m(t) - \frac{dQ_m(t)}{dt} \tag{23}$$

Осыдан

$$\left.\begin{aligned} &(\alpha E - A)q_m = p_m, \\ &(\alpha E - A)q_{m-1} = p_{m-1} - mq_m, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

Мұнда $\alpha E - A$ матрицасы ерекше емес. Сондықтан, (24) жүйеден сатылап барлық q_m векторларын бірмәндес түрде анықтауға болады:

$$q_m = (\alpha E - A)^{-1} p_m \tag{25}$$

екінші теңдеуден q_{m-1} векторын, осылай барлық векторларды табамыз.

2^0. Резонанс жағдай: α саны A матрицасының меншікті саны. Бұл жағдайда дербес шешім

$$x(t) = Q_{m+1}(t)e^{\alpha t} \tag{26}$$

түрінде ізделінеді. Мұнда $Q_{m+1}(t)$ - вектор-функция, оның әрбір компоненті дәрежесі $m+1$-ден аспайтын көпмүшелік.

Егер α саны A матрицасының еселікті меншікті саны болса, онда $Q(t)$ векторының компоненттерінің t бойынша дәрежелері сәйкес еселік көрсеткішіне өседі (толық дәлелдеуін [4] оқу құралынан көруге болады).

14-ЛЕКЦИЯ. Шешімнің орнықтылығы

Лекция мақсаты: Орнықтылықтың Ляпунов мағынасымен таныстыру. Оның геометриялық мән-мағынасын таныстыру. Зерттеу әдістерімен таныстыру.
Негізгі сөздер: асимптотикалық орнықтылық, Ляпунов функциясы, анықталған оң таңбалы, теріс таңбалы функциялар.

Қысқаша мазмұны

Шешімнің орнықтылығы

2.1. Автономды теңдеулердің қалыпты жүйесін қарастырайық:

$$\frac{dx}{dt} = f(x) \tag{1}$$

Мұндағы $f(x)$ векторы кейбір $D \subset R^n$ облысында анықталған және үздіксіз дифференциалданатын функция деп есептелінеді.

Айталық, a -нүктесі (1) жүйенің теңбе-теңдік қалпы болсын:

$$f(a) = 0 \tag{2}$$

ал $x = \varphi(t, x^0)$ функциясы жүйенің бастапқы

$$\varphi(0, x^0) = x^0 \tag{3}$$

шартын қанағаттандыратыг шешім болсын.

Анықтама-1. Жүйенің теңбе-теңдік қалпы $x = a$ Ляпунов бойынша орнықты деп аталынады, егер:

1) кез келген $\delta_0 > 0$ саны үшін $\left\|x^0 - a\right\| < \delta_0$ теңсіздігін

қанағаттандыратын $x = \varphi(t, x^0)$ шешім t-ның барлық оң мәндерінде анықталса,

2) кез келген $\varepsilon > 0$ саны үшін $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ саны табылып,

$\left\|x^0 - a\right\| \le \delta$ теңсіздігінен $\left\|\varphi(t, x^0) - a\right\| \le \varepsilon, \forall t \ge 0$ теңсіздігі шықса.

Анықтама-2. Теңбе-теңдік қалып асимптотикалы орнықты деп аталынады, егер ол Ляпунов бойынша орнықты болса және қосымша

$$\lim_{t \to +\infty} \varphi(t, x^0) = a$$

шарты орындалса.

Анықтама-3. Теңбе-теңдік қалып Ляпунов бойынша орнықсыз деп аталынады, егер қаншалықты кіші $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ саны табылмасын, $\left\| x^0 - a \right\| \le \delta$ теңсіздігінен $\left\| \varphi(t, x^0) - a \right\| \le \varepsilon$ теңсіздігі шықпаса.

2.2. Бұл анықтамалардың бәріне геометриялық түсініктеме беруге болады.

Алдын ала ескерте кететін жағдай: теңбе-теңдік $x = a$ қалпы үшін координат жүйесінің бас нүктесін алуға болады, яғни $a = 0$ деп алуға болады (ол үшін параллельдік көшіру жасасақ, жеткілікті).

Бұл жағдайда орнықтылықты қысқаша анықтауға болады: теңбе-теңдік $x = 0$ қалпы Ляпунов бойынша орнықты деп аталынады, егер кез келген $\varepsilon > 0$ саны үшін кейбір $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ саны табылып, мынандай теңсіздіктер орындалса:

$$\left\| x^0 \right\| \le \delta \Rightarrow \left\| \varphi(t, x^0) \right\| \le \varepsilon, \forall t \ge 0 \tag{4}$$

Ал асимптотикалық орнықты болу үшін қосымша

$$\lim_{t \to \infty} \varphi(t, x^0) = 0 \tag{5}$$

шарты орындалуы керек.

Соңғы теңсіздіктерге төмендегідей геометриялық түсініктеме беруге болады.

Фазалық R_x^n кеңістігінде центрлері координат жүйесінің басында жатқан радиустері сәйкес δ және ε сандарына тең центрлес сфералар жүргізейік. Бұлардың радиустері әртүрлі қатынаста болуы мүмкін. Айқын болуы үшін $\delta < \varepsilon$ болсын. Сонда орнықты дегеніміз – радиусы δ-ға тең сфераның ішінен басталған траектория радиусы ε-ге тең сфераның ішінен шықпайды дегенді білдіреді. Ал асимптотикалық орнықты дегеніміз – радиусы сол δ-ға тең сфераның ішінен басталған траектория t-ның мәні өскен сайын координат жүйесінің бас нүктесіне шексіз жақындайды дегенді білдіреді. Орнықсыздық дегеніміз – қаншалықты кіші мәнді $\delta > 0$ саны табылмасын, кіші сфераның ішінен басталған траектория белгілі бір мезеттен бастап үлкен сфераның сыртына шығады дегенді білдіреді.

Сызықты жүйенің орнықтылығы

4.1. n теңдеуден тұратын тұрақты коэффициентті сызықты біртекті жүйені қарастырайық:

$$\frac{dx}{dt} = Ax \tag{1}$$

Бұл жүйенің теңбе-теңдік қалпы $x = 0$ нүктесінің орнықтылық, орнықсыздық шарттарын келтірейік.

Теорема-1. Егер A матрицасының барлық меншікті сандарының нақты бөліктері теріс болса, онда (1) жүйенің теңбе-теңдік қалпы асимптотикалы орнықты, ал егер сол меншікті сандардың ең болмағанда біреуінің нақты бөлігі оң болса, онда теңбе-теңдік қалып орнықсыз.

Дәлелдеуі. Айталық, $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ - сандары A матрицасының меншікті сандары болсын және $\operatorname{Re} \lambda_i \le -\alpha < 0, (i = 1, ..., n)$. Бұл жағдайда Ляпунов функциясын құру үшін A матрицасын алдын ала диагоналды дерлік түрге келтіреміз. Алгебрадан белгілі, A матрицасы үшін кейбір T матрицасын табуға болады және ол мынандай теңдікті қанағаттандырады:

$$T^{-1} A T = \Lambda + B_\varepsilon$$

Мұнда $\Lambda = diag\{\lambda_1, ..., \lambda_n\}$, ал $B_\varepsilon = (b_{ij})$ - матрицасының әрбір элементі $\left| b_{ij} \right| \le \varepsilon, (i, j = 1, ..., n)$ шартын қанағаттандырады.

(1) жүйе үшін $x = Ty$ алмастыруын қолдансақ,

$$\frac{dy}{dt} = \left(\Lambda + B_\varepsilon \right) y \tag{2}$$

жүйесіне келеміз. Осы жүйеге Ляпунов функциясын төмендегідей түрде алайық:

$$V(y)=\sum_{i=1}^{n}\left|y_i\right|^2=(y,\overline{y}) \tag{3}$$

Бұл функция $x=0$ нүктесінің (немесе $y=0$ нүктесінің) кез келген аймағында анықталған оң таңбалы. Енді оның туындысын есептейік:

$$\overset{\bullet}{V}(y)=\frac{d}{dt}(y,\overline{y})=(\frac{dy}{dt},\overline{y})+(y,\frac{d\overline{y}}{dt})=$$
$$\left((\Lambda+\overline{\Lambda})y,\overline{y}\right)+\left[(B_\varepsilon y,\overline{y})+(y,B_\varepsilon\overline{y})\right]$$

Осындағы бірінші қосындыны бағаласақ,

$$\sum_{i=1}^{n}(\lambda_i+\overline{\lambda_i})\left|y_i\right|^2=2\sum_{i=1}^{n}\operatorname{Re}\lambda_i\left|y_i\right|^2\le-2\alpha\sum_{i=1}^{n}\left|y_i\right|^2$$

теңсіздігін аламыз. Екінші қосындыны бағалайық:

$\left\|(B_\varepsilon y,\overline{y})\right\|=\left\|(y,B_\varepsilon\overline{y})\right\|\le\sum\limits_{i,j=1}^{n}\left|b_{ij}\right|\left|y_i\right|\left|y_j\right|\le\varepsilon\sum\limits_{i,j=1}^{n}\left|y_i\right|\left|y_j\right|=\varepsilon\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\left|y_i\right|\right)^2\le n\varepsilon\sum\limits_{i=1}^{n}\left|y_i\right|^2$ Осыдан

$$\overset{\bullet}{V}(y)\le-2(\alpha-n\varepsilon)\sum_{i=1}^{n}\left|y_i\right|^2=-2(\alpha-n\varepsilon)V(y) \tag{4}$$

Соңғы қатынастағы ε санын $0<\varepsilon<\dfrac{\alpha}{n}$ теңсіздігі орындалатындай етіп алсақ, онда $\overset{\bullet}{V}(y)$ функциясының анықталған теріс таңбалы болатынын көреміз. Сондықтан, Ляпуновтың екінші теоремасы бойынша теңбе-теңдік қалып асимптотикалы орнықты.

Теореманың екінші бөлігіне келетін болсақ, кейбір λ_{i_0} меншікті санның нақты бөлігі оң болсын: $\operatorname{Re}\lambda_{i_0}>0$. Бұл санға сәйкес шешім

$$x(t)=e^{\lambda_{i_0}t}f \tag{5}$$

түрінде жазылады. Мұндағы, f - сәйкес меншікті вектор. Осыдан

$$\left\|x(t)\right\|=e^{\alpha t}\left\|f\right\|,\ \alpha=\operatorname{Re}\lambda_{i_0} \tag{6}$$

$\alpha>0$ болғандықтан, t шексіздікке ұмтылғанда $\left\|x(t)\right\|$ нөлге ұмтылмайды, яғни теңбе-теңдік қалып орнықсыз.

Ескерту-1. Егер A матрицасының меншікті сандарының нақты бөліктері нөлге тең болып, қалғандарының нақты бөліктері теріс болса, онда теңбе-теңдік қалып орнықты да, орнықсыз да болуы мүмкін. Егер таза жорамал санға сәйкес жордан шаршысының реті бірден аспаса, онда теңбе-теңдік қалып орнықты. Кері жағдайда теңбе-теңдік қалып орнықсыз.

Мысалы, λ_1 меншікті саны таза жорамал сан болса, ал оған екінші ретті жордан шаршысы сәйкес келсе, онда шешім

$$x(t)=e^{\lambda_1 t}(f+tg) \tag{7}$$

түрінде жазылады. Мұндағы, f,g - тұрақты меншікті векторлар. Осыдан

$$\left\|x(t)\right\|=\left\|f+tg\right\|\ge t\left\|g\right\|-\left\|f\right\|\to\infty \text{ егер } t\to\infty,$$

яғни теңбе-теңдік қалып орнықсыз.

Ескерту-2. Жоғарыда айтылған тұжырымдарды (1) жүйенің айқын шешімін пайдаланып дәлелдеуге де болады. Ол шешім былай жазылады:

$$x(t,x^0)=e^{tA}x^0 \tag{8}$$

Мұнда тек e^{tA} матрицасының түрін анықтау керек. Жоғарғы әдістің бір артықшылығы – оны сызықты емес жүйеге де қолдануға болатындығы.

Соңғы екі тұжырымның дәлелдеулерін [4] оқу құралынан көруге болады.

Сызықты жуықтау арқылы орнықтылықты зерттеу

5.1. Айталық, $x=0$ нүктесі автономды

$$\frac{dx}{dt} = f(x) \tag{1}$$

жүйенің теңбе-теңдік қалпы болсын, яғни $f(0) = 0$. Осы $x = 0$ нүктесінің кейбір U аймағында $f(x)$ функциясы екінші ретке дейін үздіксіз дифференциалдансын. Тейлор формуласы бойынша:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + g(x) \tag{2}$$

Мұнда $f(0) = 0$, $f'(0)$ - Якоби матрицасы, оның әрбір элементі $\frac{\partial f_i(0)}{\partial x_k}, (i, k = 1 \ldots, n)$, түрінде анықталады. Ал $g(x)$ функциясы үшін

$$\|g(x)\| \le C\|x\|^2, \ x \in U \tag{3}$$

шарты орындалады. Сондықтан, жуықтап, $f(x) \approx f'(0)x$ деп алуға болады. Егер $\left(\frac{\partial f_i(0)}{\partial x_k}\right) = A$ деп белгілесек, төмендегідей сызықты жүйе аламыз:

$$\frac{dx}{dt} = Ax \tag{4}$$

Сызықты емес (1) жүйеден (4) жүйеге көшуді жүйені сызықтандыру деп атайды. Ол белгілі бір шешімнің аймағында орындалады.

Сызықтандырылған (4) жүйе – тұрақты коэффициентті сызықты жүйе. Ол оңай интегралданады. Сондықтан, оның $x = 0$ теңбе-теңдік қалпының орнықтылығы толық зерттелген. Оны өткен параграфта келтірдік.

Енді осы сызықтандырылған (4) жүйенің теңбе-теңдік қалпының орнықтылығына қарап бастапқы сызықты емес (1) жүйенің теңбе-теңдік қалпының орнықтылығын анықтау мүмкіншілігін қарастырайық. Бұл жөнінде Ляпуновтың іргелі тұжырымы төмендегідей.

Теорема-1. Айталық, $f(x)$ вектор-функциясы теңбе-теңдік қалыптың кейбір аймағында екі рет үздіксіз дифференциалдансын. Егер Якоби матрицасының меншікті сандарының нақты бөліктері теріс болса, онда сызықты емес (1) жүйенің теңбе-теңдік қалпы асимптотикалы орнықты және кез келген шешім үшін төмендегідей шарт орындалады:

$$\left\|x(t, x^0)\right\| \le Ce^{-\alpha t}\left\|x^0\right\|, \ \forall t \in [0, \infty) \tag{5}$$

мұнда $\alpha > 0, C > 0, x^0$ -мейлінше аз шама.

Дәлелдеуі. Берілген (1) жүйені (2) жіктеуді пайдаланып төмендегідей түрде жазайық:

$$\frac{dx}{dt} = Ax + g(x) \tag{5}$$

Мұндағы, $A = \left(\frac{\partial f_i(0)}{\partial x_k}\right)$ - тұрақты матрица, ал $g(x)$ функциясы (3) теңсіздікті қанағаттандырады. Өткен параграфта көрсетілгендей, кейбір T - матрицасы арқылы A матрицасын диагоналды дерлік түрге келтіреміз. Ол үшін $x = Ty$ алмастыруын жасасақ, жүйе мына түрге келеді:

$$\frac{dy}{dt} = (\Lambda + B_\varepsilon)y + h(y) \tag{6}$$

Мұнда Λ- диагоналды матрица, $B_\varepsilon = (b_{ij})$ - матрицасының әрбір элементі шектелген: $|b_{ij}| \le \varepsilon$, ал $h(y) = T^{-1}g(Ty)$.

Ляпунов функциясы үшін сол алдыңғы параграфта көрсетілген функцияны алайық:

$$V(x) = \sum_{i=1}^{n} |y_i|^2 = (y, \bar{y}) \tag{7}$$

Бұл функция анықталған оң таңбалы. Енді осы функцияның (6) жүйе бойынша алынған туындысын есептейік:

$$\overset{\bullet}{V}(y)=\frac{d}{dt}\left(y,\overline{y}\right)=\left(\frac{dy}{dt},\overline{y}\right)+\left(y,\frac{d\overline{y}}{dt}\right)=$$
$$=\left[\left((\Lambda+B_\varepsilon)y,\overline{y}\right)+\left(y,\left(\overline{\Lambda}+\overline{B_\varepsilon}\right)\overline{y}\right)\right]+\left[\left(h(y),\overline{y}\right)+\left(y,\overline{h(y)}\right)\right]\equiv A_1+A_2 \tag{8}$$

Мұнда A_1 және A_2 сәйкес бірінші және екінші квадрат жақшалардың ішіндегі өрнектерді білдіреді. Осындағы A_1 қосындысы сызықты

$$\frac{dy}{dt}=\left(\Lambda+B_\varepsilon\right)y \tag{9}$$

жүйе бойынша алынған туындыны білдіреді. Сондықтан §3 параграфтағы теорема-5 бойынша (онда $\overset{\bullet}{V}(y)\le-\alpha V(y)$) деп көрсетілген):

$$A_1\le-\gamma\|x\|^2,\ \gamma>0 \tag{10}$$

Осы сияқты

$$\|y\|=\left\|T^{-1}x\right\|\le C_1\|x\|,$$
$$\|h(y)\|=\left\|T^{-1}g(Ty)\right\|\le C_2\|g(x)\|\le C_2C_3\|x\|^2$$

Осыдан

$$\|A_2\|\le 2\|y\|\,\|h(y)\|\le C\|x\|^3 \tag{11}$$

мұндағы $C=2C_2C_3$.

Сондықтан,

$$\overset{\bullet}{V}(x)\equiv A_1+A_2\le-\|x\|^2\left(\gamma-C\|x\|\right) \tag{12}$$

Егер кейбір $U_1\subset U$ аймағында $\|x\|\le\frac{\gamma}{2}C$ деп алсақ, онда

$$\overset{\bullet}{V}(x)\le-\frac{\gamma}{2}\|x\|^2,\ \forall x\in U_1 \tag{13}$$

яғни U_1 облысында $\overset{\bullet}{V}(x)$ функциясы анықталған теріс таңбалы мән қабылдайды және

$$\overset{\bullet}{V}(x)\le-\alpha V(x),\ \forall x\in U_1 \tag{14}$$

мұндағы $\alpha>0$. Ляпуновтың екінші теоремасы бойынша теңбе-теңдік қалып $x=0$ асимптотикалы орнықты. (14) теңсіздіктен (5) шарты оңай шығады (§3).

Теорема-2. Айталық, $f(x)$ вектор-функциясы теңбе-теңдік қалыптың кейбір аймағында екі рет үздіксіз дифференциалдансын. Егер Якоби матрицасының меншікті сандарының кейбіреуінің нақты бөлігі оң болса, онда теңбе-теңдік қалып орнықсыз.

Дәлелдеуі. Айталық, λ_n меншікті санының нақты бөлігі оң болсын: $\mathrm{Re}\lambda_n>0$. Бұл жағдайда A матрицасына T түрлендіруін пайдаланып, оны төменгі үшбұрышты диагоналды түрге келтірсек, соңғы теңдеу

$$\frac{dy_n}{dt}=\lambda_ny_n+h_n(y) \tag{15}$$

түрінде жазылады. Осы теңдеу үшін Четаев функциясын мына түрде алайық:

$$V(x)=|y_n|^2=\left(y_n,\overline{y_n}\right) \tag{16}$$

Осы функцияның (15) теңдеу бойынша туындысын есептейік:

$$\dot{V}(x) = \left(\frac{dy_n}{dt}, \overline{y_n}\right) + \left(y_n, \frac{d\overline{y_n}}{dt}\right) = \left(\lambda_n y_n + h_n(y), \overline{y_n}\right) +$$

$$+ \left(y_n, \bar{\lambda}_n \bar{y}_n + \bar{h}_n(\bar{y})\right) = 2\operatorname{Re}\lambda_n(y_n, \overline{y_n}) + h(y) = 2\operatorname{Re}\lambda_n|y_n|^2 + h(y)$$

мұндағы, $\|h\| \le C\|y\|^3$.

Соңғы теңдіктен

$$\dot{V}(x) \ge 2\operatorname{Re}\lambda_n|y_n|^2 - C\|y\|^3 \tag{17}$$

теңсіздігін аламыз. Осы (16) және (17) қатынастардан $x = 0$ нүктесінің кейбір аймағында $V(x) > 0$ және $\dot{V}(x) > 0$ болатынын көреміз. Мысалы, $y_1 = 0, y_2 = 0, ..., y_{n-1} = 0, y_n \ne 0$ нүктесінде $V(x)$ және $\dot{V}(x)$ функциялары анықталған оң таңбалы. Сондықтан, U_1 аймағы үшін $y_n \ne 0$ облысын алсақ, жеткілікті. Егер $|y_n|$ жеткілікті аз шама болса, онда $U_1 \subset U$ және оның ішкі шекарасында $x = 0$ нүктесі жатыр. Четаев теоремасы бойынша теңбе-теңдік қалып орнықсыз.

Теорема-3. Егер Якоби матрицасының меншікті сандарының кейбіреулерінің нақты бөліктері нөлге тең болып, қалғандарының нақты бөліктері теріс болса, онда (5) жүйедегі $g(x)$ функциясының берілуіне қарай теңбе-теңдік қалып орнықты да, орнықсыз да бола алады.Мұндай жағдайларды ерекше жағдайлар деп атайды. Олар туралы мағлұматтарды арнаулы $[8]$ кітабынан алуға болады.

15-ЛЕКЦИЯ. Бірінші ретті дербес туындылы сызықты дифференциалдық теңдеулер

Лекция мақсаты: Дербес туындылы сызықты теңдеулерді интегралдау әдістерімен таныстыру. Жалпы шешімді құру әдісімен таныстыру.

Негізгі сөздер: Квазисызықты теңдеулер, сипаттаушы теңдеулер, интеграл, симметриялы түрдегі теңдеулер.

Қысқаша мазмұны

1. Бірінші ретті дербес туындылы дифференциал теңдеудің жалпы түрі былай жазылады:

$$F\left(x_1, \ldots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right) = 0 \tag{1}$$

Мұндағы u- белгісіз функция, $x_1, ..., x_n$- тәуелсіз айнымалылар. F- кейбір $D_1 \subset R^{2n+1}$ облысында екі рет үздіксіз дифференциалданатын функция болсын.

Анықтама. Кейбір $D_2 \subset R^n$ облысында анықталған үздіксіз дифференциалданатын $u = \varphi(x_1, ..., x_n)$ функциясы (1) теңдеудің шешімі деп аталады, егер ол төмендегідей шарттарды қанағаттандырса:

1) $\left(x_1, ..., x_n, \varphi, \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}\right) \in D_1, \ \forall(x_1, ..., x_n) \in D_2$

2) $F\left(x_1, ..., x_n, \varphi, \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}\right) = 0, \ \forall(x_1, ..., x_n) \in D_2$

Бұл $u = \varphi(x_1, ..., x_n)$ функциясы $R^{n+1}_{x_1, ..., x_n, u}$ - кеңістігінде кейбір бетті анықтайды. Осы бетті берілген теңдеудің интегралдық беті деп атайды.

Бірінші ретті дербес туындылы теңдеулерді интегралдау әдетте жәй дифференциал теңдеулер жүйесін интегралдауға келтіріледі. Сондықтан, мұндай теңдеулер жәй дифференциал теңдеулер бағдарламасына енгізілген.

Біз бұл жерде бірінші ретті дербес туындылы теңдеулердің тек екі сызықты түрін ғана қарастырамыз.

2. Алдымен, біртекті сызықты теңдеуді қарастырайық:

$$f_1(x_1, ..., x_n)\frac{\partial u}{\partial x_1} + ... + f_n(x_1, ..., x_n)\frac{\partial u}{\partial x_n} = 0 \qquad (2)$$

Мұндағы, f_i - функциялары кейбір $D \subset R^n$ облысында үздіксіз дифференциалданатын және бәрі бірдей нөлге айналмайтын функциялар деп есептелінеді. Бұл (2) теңдеуге төмендегідей жәй дифференциал теңдеулердің симметриялық түрі сәйкес қойылады.

$$\frac{dx_1}{f_1(x_1, ..., x_n)} = \frac{dx_2}{f_2(x_1, ..., x_n)} = ... = \frac{dx_n}{f_n(x_1, ..., x_n)} \qquad (3)$$

Осы жүйені (2) теңдеудің сипаттаушы жүйесі деп атайды. Оның интегралдық қисықтары (2) теңдеудің сипаттауыштары (характеристикалары) деп аталады. Бұл жүйенің барлық уақытта шешімдері бар және ол жалғыз. Сондықтан, D облысының әрбір нүктесі арқылы тек бір ғана сипаттауыш өтеді және олардыңғ тәуелсіздерінің саны $n-1$ - ге тең, себебі, ол $n-1$ - ретті қалыпты жүйеге эквивалент.

Теорема-1. D облысында анықталған үздіксіз дифференциалданатын $u = \varphi(x_1, ..., x_n)$ функциясы (2) теңдеудің шешімі болуы үшін оның (3) жүйенің интегралы болуы қажетті және жеткілікті.

Дәлелдеуі. 1) қажеттілігі. Айталық, $u = \varphi(x_1, ..., x_n)$ функциясы (2) теңдеудің шешімі болсын:

$$f_1(x_1, ..., x_n)\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + ... + f_n(x_1, ..., x_n)\frac{\partial \varphi}{\partial x_n} = 0, \ \forall(x_1, ..., x_n) \in D \qquad (4)$$

Бұл функцияның толық дифференциалы былай жазылады:

$$du = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}dx_1 + ... + \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}dx_n \qquad (5)$$

Осындағы әрбір dx_i-дің орнына оған пропорционал f_i функциясын қойсақ, төмендегідей қатынас аламыз:

$$du = \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}f_1(x_1, ..., x_n) + ... + \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}f_n(x_1, ..., x_n)\right]K(x_1, ..., x_n) \qquad (6)$$

Мұндағы, $K(x_1, ..., x_n) \neq 0$ - пропорция коэффициенті. Алдыңғы (4) тепе-теңдікті ескерсек, квадрат жақшаның ішіндегі өрнек нөлге тепе-тең болады, яғни

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}f_1(x_1, ..., x_n) + ... + \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}f_n(x_1, ..., x_n) = 0, \ \forall(x_1, ..., x_n) \in D \qquad (7)$$

Ал бұл тепе-теңдік $\varphi(x_1, ..., x_n)$ функциясының (3) жүйенің интегралы болатынын білдіреді.

2) жеткіліктілігі. Айталық, $u = \varphi(x_1, ..., x_n)$ функциясы (3) жүйенің интегралы болсын:

$$du/(3) = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}f_1(x_1, ..., x_n) + ... + \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}f_n(x_1, ..., x_n) = 0, \ \forall(x_1, ..., x_n) \in D \qquad (8)$$

Соңғы тепе-теңдік $u = \varphi(x_1, ..., x_n)$ функциясының (2) теңдеудің шешімі екенін көрсетеді.

Теорема-2. Берілген (2) теңдеудің жалпы шешімі

$$u = \Phi(\varphi_1, ..., \varphi_{n-1}) \qquad (9)$$

түрінде анықталады. Мұндағы, Φ - кез келген үздіксіз дифференциалданатын функция, ал $\varphi_1, ..., \varphi_{n-1}$ - (3) жүйенің тәуелсіз интегралдары.

Дәлелдеуі. Айталық, кейбір $u=\varphi_n(x_1,...,x_n)$ функциясы (2) теңдеудің D облысындағы кез келген шешімі болсын. Бұл шешім $\varphi_1,...,\varphi_{n-1}$ функцияларымен қоса (2) теңдеуді тепе-теңдікке айналдырады:

$$f_1(x_1,...,x_n)\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_1}+...+f_n(x_1,...,x_n)\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_n}=0,\ \forall(x_1,...,x_n)\in D \qquad (10)$$
$$(i=1,...,n)$$

Бұл біртекті сызықты жүйенің нөлдік емес

$$u_1=\varphi_1(x_1,...,x_n),...,u_n=\varphi_n(x_1,...,x_n)$$

шешімі бар. Сондықтан, бұл жүйенің анықтауышы нөлге тең. Ол $\varphi_1,...,\varphi_n$ функцияларының якобианына тең.

$$\frac{\partial(\varphi_1,...,\varphi_n)}{\partial(x_1,...,x_n)}=0,\ \ \forall(x_1,...,x_n)\in D \qquad (11)$$

Соңғы қатынас $\varphi_1,...,\varphi_n$ функцияларының өзара тәуелділігін көрсетеді. Олардың алдыңғы $\varphi_1,...,\varphi_{n-1}$ функциялары өзара тәуелсіз функциялар еді. Сондықтан тәуелділікті соңғы φ_n функциясы беріп тұр:

$$\varphi_n=\Phi(\varphi_1,...,\varphi_{n-1}) \qquad (12)$$

Мұндағы, φ_n - кез келген шешім боғандықтан, (12) қатынас жалпы шешімді береді.

3. Біртексіз сызықты теңдеуді қарастырайық:

$$f_1(x_1,...,x_n,u)\frac{\partial u}{\partial x_1}+...+f_n(x_1,...,x_n,u)\frac{\partial u}{\partial x_n}=g(x_1,...,x_n,u) \qquad (13)$$

Мұндағы, f_i - функциялары кейбір $D_1\subset R^{n+1}$ облысында үздіксіз дифференциалданатын және бәрі бірдей нөлге тең емес деп есептелінеді: $\sum_{i=1}^{n} f_i^2(x_1,...,x_n,u)\neq 0$

Бұл теңдеуді біртекті сызықты түрге келтіру арқылы интегралдайды. Ол үшін шешімді айқындалмаған функция түрінде іздейді:

$$v(x_1,...,x_n,u)=0 \qquad (14)$$

Мұндағы, v - функциясын D_1 облысында үздіксіз дифференциалданатын және $\frac{\partial v}{\partial u}\neq 0$ деп аламыз. Осы қатынасты кез келген x_i бойынша дифференциалдайық:

$$\frac{\partial v}{\partial x_i}+\frac{\partial v}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x_i}=0$$

Осыдан

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}=-\frac{\frac{\partial v}{\partial x_i}}{\frac{\partial v}{\partial u}},\ (i=1,...,n) \qquad (15)$$

(15) өрнекті (13) теңдеуге қойып, оны $-\frac{\partial v}{\partial u}$ бөлшегіне көбейтсек,

$$f_1(x_1,...,x_n,u)\frac{\partial v}{\partial x_1}+...+f_n(x_1,...,x_n,u)\frac{\partial v}{\partial x_n}+g(x_1,...,x_n,u)\frac{\partial v}{\partial u}=0 \qquad (16)$$

теңдеуін аламыз. Бұл v бойынша біртекті сызықты теңдеу. Сондықтан, алдыңғы пунктте көрсетілген тәсілді қолданамыз. Бұл теңдеудің сәйкес сипаттаушы жүйесі

$$\frac{dx_1}{f_1(x_1,...,x_n,u)}=...=\frac{dx_n}{f_n(x_1,...,x_n,u)}=\frac{du}{g(x_1,...,x_n,u)} \qquad (17)$$

түрінде жазылады. Бұл жүйенің өзара тәуелсіз интегралдары n - ге тең:

$$\varphi_1(x_1, ..., x_n, u), ..., \varphi_n(x_1, ..., x_n, u)$$

Бұл жағдайда (13) теңдеудің жалпы шешімі

$$v = \Phi(\varphi_1, ..., \varphi_n) \tag{18}$$

түрінде жазылады. Шешімді анықталмаған түрде іздеп отырғанымызды ескерсек,

$$\Phi(\varphi_1(x_1, ..., x_n, u), ..., \varphi_n(x_1, ..., x_n, u)) = 0 \tag{19}$$

қатынасын аламыз. Осындағы u -ды $x_1, ..., x_n$ арқылы өрнектеуге мүмкін болса, ол функция (13) теңдеудің шешімі болады.

Бұл жерде арнайы шешімдер де болуы мүмкін. Ондай шешімдер сол уақытта пайда болады, егер (14) тепе-теңдік тек $u = \varphi(x_1, ..., x_n)$ болғанда ғана орындалса.

4. Біртекті және біртексіз сызықты теңдеулер үшін Коши есебі былай қойылады: теңдеудің шешімдерінің ішінен оның бір аргументі тұрақталған жағдайда белгілі бір $n-1$ - өлшемді бетке айналатын дербес шешімді анықтау керек, яғни $u = \varphi(x_1, ..., x_n)$ шешімінің $x_n = x_n^0$ болғанда белгілі $\alpha(x_1, ..., x_{n-1})$ функциясына тең болатын шешімді табу керек. Мұны қысқаша

$$u\big|_{x_n = x_n^0} = \alpha(x_1, ..., x_{n-1}) \tag{20}$$

түрінде жазады.

Мысалы, екі өлшемді дербес туындылы

$$P\frac{\partial z}{\partial x} + Q\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

теңдеуі үшін Коши есебі былай қойылады:

$$z = \varphi(x, y)$$

шешімінің $x = x_0$ болғанда $z = \alpha(y)$ шартын қанағаттандыратын шешімді іздеу. Ол барлық интегралдық беттердің ішінен $z = \alpha(y)$ қисығы арқылы өтетін бетті табу болып есептелінеді.

Жалпы жағдайда Коши есебінің шешімін табу қиындық тудырмайды.

Мысалдар.

1. $$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

теңдеуінің жалпы шешімін табайық. Сәйкес сипаттаушы симметрия жүйесін құрайық:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}$$

Осыдан

$$\varphi_1 = \frac{y}{x} = C_1,\ \varphi_2 = \frac{z}{x} = C_2$$

интегралдарын табамыз. Бұл жағдайда жалпы шешім

$$u = \Phi\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right)$$

түрінде жазылады. Дифференциалдау арқылы бұл функцияның шешім болатынына көз жеткізу оңай.

2. $$x\frac{\partial u}{\partial x} - y\frac{\partial u}{\partial y} = x - y$$

теңдеуінің жалпы шешімін құрайық. Сәйкес

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{-y} = \frac{du}{x-y}$$

жүйесінің екі тәуелсіз интегралдары оңай табылады:

$$\varphi_1 = xy = C_1,\ \varphi_2 = x + y - u = C_2$$

Жалпы шешім айқындалмаған түрде жазылады:

$$\Phi(xy,\ x+y-u)=0$$

Осы қатынасты екінші аргументі бойынша шешсек,

$$u=x+y-f(xy)$$

түріндегі шешім аламыз.